Landau-Siegel 零点不存在

QED

2026 年 11 月 2 日

目录

1 简介 **1**

2 定理的证明 **2**

3 虚二次域的类数 **10**

A 附录 **13**

参考文献 **15**

1 简介

定理 1 (Landau 定理)**.** *存在一个常数 $c > 0$, 使得对任意正整数 $q \geq 3$, 在模 q 的所有 Dirichlet 特征中, 至多存在一个特征 χ, 使 $L(s, \chi)$ 有一个实零点 $\beta \in (0, 1)$ 满足*

$$(1 - \beta) \log q \leq c.$$

以上定理中的特征称为对应于常数 c 的例外特征, 零点称为对应于常数 c 的例外零点或 Landau-Siegel 零点, 这样的特征若存在, 则必然是非主实特征. Landau-Siegel 零点被认为是广义 Riemann 猜想的潜在反例, 排除 Landau-Siegel 零点的存在性是解析数论中的一个长期重大问题.

2026 年 10 月 1 日, AI 公司 OpenAI [1] 发表预印本, 声称其证明了 Landau–Siegel 零点不存在, 随后, Banks [2], Kerr [3], Green [4], Pescador [5], Barreto [6] 等人对这篇论文进行了简化和整理, Tao 在其博客 [7] 中介绍了 Green 的方法. 本文是基于 Barreto 论文的详细介绍, 证明关键是一个特定和式的上界估计, 目前看来, Barreto 论文中的方法是最简便的, 并且得到的结果也是最强的.

OpenAI 关于 L 函数在半平面 $\mathrm{Re}(s) > 7/8$ 内无零点的证明, 已蕴含 Landau–Siegel 零点不存在, 但该证明与本文的方法基本独立.

本文的写作使用了 DeepSeek 和 ChatGPT 辅助.

2 定理的证明

符号说明:

- x 是大于等于 3 的实数;
- q 是大于等于 3 的正整数;
- χ 是模 q 的实原特征;
- d 是满足 $d \neq 1$, $|d| \leq q$, d 无平方因子且

$$\chi(p) = \left(\frac{d}{p}\right), \qquad p \nmid q,\ p \neq 2,$$

  的整数, 其中等式右边是 Kronecker 符号, 由 $q \geq 3$ 和 χ 实且本原知这样的 d 是存在的;
- $B = 2\sqrt{2x}\, q^{1/4}$;
- R 定义为平面格点上的矩形

$$R = \left\{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq u < \frac{B}{2},\ 0 \leq v < \frac{B}{2\sqrt{q}}\right\};$$

- $\alpha_i = u_i + v_i\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, 其中 (u_i, v_i) 为 R 中的点, 按任意顺序编号, 记 $\overline{\alpha_i} = u_i - v_i\sqrt{d}$ 为共轭元;
- $k = \lceil \log(x^2 B) \rceil$;
- T 定义为

$$T = \left\{(r, s) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0} : r + ks < x\right\};$$

- $f_{r,s}$ 定义为二元多项式

$$f_{r,s}(z, w) = z^r w^s;$$

- $\mathcal{M}$ 是一个 $|T|$ 行, $2|R|\lceil 2x/k \rceil$ 列的矩阵, 按如下方式定义: 首先, 对每个 $(r, s) \in T$, $1 \leq i \leq |R|$, $0 \leq j < 2x/k$, 取矩阵元

$$\partial_z^j f_{r,s}(z, w)|_{(z,w)=(\alpha_i, \overline{\alpha_i})},$$

  这样得到一个 $|T|$ 行, $|R|\lceil 2x/k \rceil$ 列的矩阵, 由于其中每个矩阵元都是 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 中的数, 则可以写成 $a + b\sqrt{d}$ 的形式, 将每个矩阵元拆成两个矩阵元 $a, b \in \mathbb{Z}$, 就得到了 $|T|$ 行, $2|R|\lceil 2x/k \rceil$ 列的整数矩阵, 即矩阵 $\mathcal{M}$;
- D 是矩阵 $\mathcal{M}$ 的某个 $|T|$ 阶子方阵的行列式.

关于这些定义, 有以下几点简单的观察.

- $$\log B = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log q + \frac{3}{2}\log 2 = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log q + O(1);$$
- $$|R| = \left\lceil \frac{B}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{B}{2\sqrt{q}} \right\rceil \geq \frac{B^2}{4\sqrt{q}} = 2x;$$
- 由 $|d| \leq q$ 知
$$|\overline{\alpha_i}| \leq |\alpha_i| \leq u_i + v_i\sqrt{|d|} < \frac{B}{2} + \frac{B}{2\sqrt{q}}\sqrt{q} = B;$$
- 由 $k = \lceil \log(x^2 B) \rceil$ 知
$$\frac{5}{2}\log x + \frac{1}{4}\log q + \frac{3}{2}\log 2 \leq k \leq \frac{5}{2}\log x + \frac{1}{4}\log q + \frac{3}{2}\log 2 + 1,$$
若假设 $x \geq e^3$ 且 $x \geq \sqrt{q}$, 则直接计算可知
$$3 < \frac{15}{2} + \frac{1}{4}\log 3 + \frac{3}{2}\log 2 \leq k \leq 3\log x + \frac{3}{2}\log 2 + 1 \leq x;$$
- 在 $|T|$ 中, r 至多有 $\lceil x \rceil$ 种取法, s 至多有 $\lceil x/k \rceil$ 种取法, 所以
$$|T| \leq (x+1)\left(\frac{x}{k} + 1\right) = \frac{x^2 + x}{k} + x + 1 < \frac{2x^2}{k} + 2x,$$
而
$$2|R|\left\lceil \frac{2x}{k} \right\rceil \geq \frac{8x^2}{k},$$
故
$$\frac{8x^2}{k} > \frac{2x^2}{k} + 2x$$
等价于
$$3x > k,$$
而 $k < x$, 所以 $|T| < 2|R|\lceil 2x/k \rceil$, 即矩阵 $\mathcal{M}$ 的列数大于行数.

引理 1. *假设 $x \geq \max\{e^3, \sqrt{q}\}$, 则矩阵 $\mathcal{M}$ 的 $|T|$ 行在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关.*

证明. 若不然, 假设 $\{c_{r,s}\}_{(r,s)\in T}$ 是不全为 0 的有理数, 使得
$$\sum_{(r,s)\in T} c_{r,s}\partial_z^j f_{r,s}(z,w)|_{(z,w)=(\alpha_i,\overline{\alpha_i})} = 0$$
对所有的 i 和 j 都成立. 设函数
$$F(z,w) = \sum_{(r,s)\in T} c_{r,s} z^r w^s \in \mathbb{Q}[z,w],$$

由 T 的定义知 $\deg_z F < x$, $\deg_w F < x/k$.

对每个 i, 一元多项式 $F(z, \overline{\alpha_i})$ 的前 $\lceil 2x/k \rceil - 1$ 阶导都在 $z = \alpha_i$ 处为 0, 所以有两种可能, 要么 $F(z, \overline{\alpha_i}) \equiv 0$, 要么 $z = \alpha_i$ 是 $F(z, \overline{\alpha_i})$ 的至少 $\lceil 2x/k \rceil$ 重零点. 现将 F 看做 $\mathbb{Q}[z][w]$ 中的元素, 写成

$$F(z, w) = \sum_{s=0}^{\deg_w F} \mathcal{F}_s(z) w^s, \qquad \mathcal{F}_s(z) \in \mathbb{Q}[z],$$

若 $F(z, \overline{\alpha_i}) \equiv 0$, 这说明 $\overline{\alpha_i}$ 是 $F(z, w)$ 作为 $\mathbb{Q}(z)$ 系数多项式的一个根, 而由 $\deg_w F < x/k$ 知它至多有 $[x/k]$ 个根, 因此对于其余至少

$$|R| - \left[\frac{x}{k}\right] \geq 2x - \frac{x}{k} > \frac{5}{3}x > x$$

个 i 来说, 只有可能 $z = \alpha_i$ 是 $F(z, \overline{\alpha_i})$ 的至少 $\lceil 2x/k \rceil$ 重零点.

令

$$V = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ F(z, \overline{\alpha_i}) \right\}_{i=1}^{|R|}, \qquad V' = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \mathcal{F}_s(z) \right\}_{s=0}^{\deg_w F},$$

它们均是 $\mathbb{C}[z]$ 的子空间, 由

$$F(z, \overline{\alpha_i}) = \sum_{s=0}^{\deg_w F} \mathcal{F}_s(z) \overline{\alpha_i}^s$$

知 V 中每个元素都是 V' 中元素的线性组合, 所以

$$\dim_{\mathbb{C}} V \leq \dim_{\mathbb{C}} V' \leq \deg_w F + 1 < \frac{x}{k} + 1.$$

现取 V 的一组基 $\{g_b\}_{b=1}^{\dim_{\mathbb{C}} V}$, 其中诸 g_b 均为首一多项式, 并且次数两两不同, 显然这样的基总是存在的. 由 $\deg_z F < x$ 知 $\deg_z g_b < x$ 对所有 b 成立. 定义 Wronskian 行列式

$$W(z) = \det \left(\frac{\mathrm{d}^a}{\mathrm{d}z^a} g_b(z) \right)_{\substack{0 \leq a < \dim_{\mathbb{C}} V \\ 1 \leq b \leq \dim_{\mathbb{C}} V}},$$

显然 $W(z)$ 的次数不超过

$$\sum_{b=1}^{\dim_{\mathbb{C}} V} \deg_z g_b - \sum_{a=0}^{\dim_{\mathbb{C}} V - 1} a < x \dim_{\mathbb{C}} V,$$

由于 $\mathrm{d}^a(g_b(z))/\mathrm{d}z^a$ 的最高次项系数为 $(\deg_z g_b)!/(\deg_z g_b - a)!$, 所以 $W(z)$ 的最高次项系数为

$$\det \left(\frac{(\deg_z g_b)!}{(\deg_z g_b - a)!} \right)_{\substack{0 \leq a < \dim_{\mathbb{C}} V \\ 1 \leq b \leq \dim_{\mathbb{C}} V}} = \det \left(a! \binom{\deg_z g_b}{a} \right)_{\substack{0 \leq a < \dim_{\mathbb{C}} V \\ 1 \leq b \leq \dim_{\mathbb{C}} V}},$$

若该行列式为 0, 则一定存在一组不全为 0 的复数 λ_a 使得

$$\sum_{a=0}^{\dim_{\mathbb{C}} V - 1} \lambda_a a! \binom{\deg_z g_b}{a} = 0$$

对所有 b 成立, 设多项式

$$P(t) = \sum_{a=0}^{\dim_{\mathbb{C}} V - 1} \lambda_a a! \binom{t}{a} \not\equiv 0,$$

由于

$$a!\binom{t}{a} = t(t-1)\cdots(t-a+1)$$

是 t 的 a 次多项式, 所以 $P(t)$ 的次数不大于 $\dim_{\mathbb{C}} V - 1$, 而 $P(t)$ 却有 $\dim_{\mathbb{C}} V$ 个不同的根 $\deg_z g_b$, 矛盾, 因此 $W(z) \not\equiv 0$, 并且次数小于 $x \dim_{\mathbb{C}} V$.

任取一个 i 使得 $z = \alpha_i$ 是 $F(z, \overline{\alpha_i})$ 的至少 $\lceil 2x/k \rceil$ 重零点, 将它扩充为 V 的一组基, 设为

$$\{F(z, \overline{\alpha_i}), h_2(z), \ldots, h_{\dim_{\mathbb{C}} V}(z)\},$$

设这组基的 Wronskian 行列式为 $W'(z)$, 则它与 $W(z)$ 只差一个非零复数. 在行列式 $W'(z)$ 中, 第一列为

$$(F(z, \overline{\alpha_i}), \partial_z F(z, \overline{\alpha_i}), \ldots, \partial_z^{\dim_{\mathbb{C}} V - 1} F(z, \overline{\alpha_i}))^T,$$

将行列式按第一列展开即知 $z = \alpha_i$ 是 $W'(z)$ 的至少 $\lceil 2x/k \rceil - \dim_{\mathbb{C}} V + 1$ 重零点, 从而也是 $W(z)$ 的至少 $\lceil 2x/k \rceil - \dim_{\mathbb{C}} V + 1$ 重零点. 由于 $\dim_{\mathbb{C}} V$ 是整数且 $\dim_{\mathbb{C}} V < x/k + 1$, 所以 $\dim_{\mathbb{C}} V \le \lceil x/k \rceil$, 故

$$2\dim_{\mathbb{C}} V - 2 \le 2\left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil - 2 < \frac{2x}{k} \le \left\lceil \frac{2x}{k} \right\rceil,$$

由于两边都是整数, 所以

$$2\dim_{\mathbb{C}} V - 2 \le \left\lceil \frac{2x}{k} \right\rceil - 1,$$

则有

$$\left\lceil \frac{2x}{k} \right\rceil - \dim_{\mathbb{C}} V + 1 \ge \dim_{\mathbb{C}} V.$$

由于使得 $z = \alpha_i$ 是 $F(z, \overline{\alpha_i})$ 的至少 $\lceil 2x/k \rceil$ 重零点的 i 的个数严格大于 x, 所以 $W(z)$ 的零点总重数严格大于

$$x\left(\left\lceil \frac{2x}{k} \right\rceil - \dim_{\mathbb{C}} V + 1\right) \ge x \dim_{\mathbb{C}} V,$$

而这与 $W(z)$ 的次数小于 $x \dim_{\mathbb{C}} V$ 矛盾, 因此假设中的 $\{c_{r,s}\}_{(r,s)\in T}$ 不存在, 即矩阵 $\mathcal{M}$ 的 $|T|$ 行在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关. □

引理 2. *假设 $x \ge \max\{e^3, \sqrt{q}\}$, 取 $\mathcal{M}$ 的一个 $|T|$ 阶子方阵, 其行列式非零, 设为 $D \ne 0$, 则对任意素数 p, 若满足 $k \le p \le x$ 且 $\chi(p) = -1$, 就有*

$$p^{\sum_{(r,s)\in T}[r/p]} \mid D.$$

证明. 首先由上一引理知这样的子方阵是存在的, 记为 $\mathcal{N}$, 并且由于 $\mathcal{M}$ 中的元素都是整数, 所以 $D = \det \mathcal{N} \in \mathbb{Z}$.

由于 $\chi(p) = -1$, 所以 $(p, q) = 1$, 即 $p \nmid q$, 故有

$$\chi(p) = \left(\frac{d}{p}\right),$$

由二次剩余的 Euler 判别法知

$$-1 \equiv \left(\frac{d}{p}\right) \equiv d^{(p-1)/2} \pmod{p},$$

所以由 Fermat 小定理知

$$\alpha_i^p \equiv \left(u_i + v_i\sqrt{d}\right)^p \equiv u_i^p + v_i^p\left(\sqrt{d}\right)^p \equiv u_i + v_i d^{(p-1)/2}\sqrt{d} \equiv u_i - v_i\sqrt{d} \equiv \overline{\alpha_i} \pmod{p\mathbb{Z}[\sqrt{d}]},$$

因此多项式 $z^p - w$ 在 $(\alpha_i, \overline{\alpha_i})$ 处的值在 $p\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 中, 此外显然其各阶导 $\partial_z^n(z^p - w) = p(p-1)\cdots(p-n+1)z^{p-n}$ 在 $(\alpha_i, \overline{\alpha_i})$ 处的值也在 $p\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 中.

对每个 $(r, s) \in T$, 令

$$h = \left[\frac{r}{p}\right],$$

考虑线性映射

$$z^r w^s \mapsto z^{r-ph}(z^p - w)^h w^s,$$

使用二项式定理展开得

$$z^{r-ph}(z^p - w)^h w^s = \sum_{l=0}^{h}(-1)^l\binom{h}{l}z^{r-pl}w^{s+l} = z^r w^s + \sum_{l=1}^{h}(-1)^l\binom{h}{l}z^{r-pl}w^{s+l},$$

每个新增单项式 $z^{r-pl}w^{s+l}$ 都满足

$$(r - pl) + k(s + l) = r + ks + l(k - p) \le r + ks < x,$$

故 $(r - pl, s + l)$ 仍在 T 中, 且 z 的次数 $r - pl < r$.

此前并未规定 $\mathcal{M}$ 中 $|T|$ 行具体如何排列, 不妨设按 z 的次数升序排列, 则每个元素由 $z^r w^s$ 变为 $z^{r-ph}(z^p - w)^h w^s$ 相当于给 $\mathcal{M}$ 左乘了一个方阵, 设为 $\mathcal{L}$, 而且该方阵是下三角的, 对角元均为 1, 因此 $\det\mathcal{L} = 1$, 故 $\det(\mathcal{L}\mathcal{N}) = D$. 在新矩阵 $\mathcal{L}\mathcal{N}$ 中, 每个矩阵元是

$$\partial_z^j\left(z^{r-ph}(z^p - w)^h w^s\right)|_{(z,w)=(\alpha_i,\overline{\alpha_i})}$$

在基 $\{1, \sqrt{d}\}$ 下的第一分量或第二分量. 由 Leibniz 法则知 $\partial_z^j\left(z^{r-ph}(z^p - w)^h w^s\right)$ 展开后的每一项都至少含一些 $z^p - w$ 或其导数, 总共 h 个, 而 $z^p - w$ 及其导数在 $(\alpha_i, \overline{\alpha_i})$ 处的值都在 $p\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 中, 所以 $\partial_z^j\left(z^{r-ph}(z^p - w)^h w^s\right)|_{(z,w)=(\alpha_i,\overline{\alpha_i})}$ 在 $p^h\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 中, 即矩阵 $\mathcal{L}\mathcal{N}$ 中 (r, s) 对应的行中每个元素都被 $p^h = p^{[r/p]}$ 整除, 从而

$$p^{\sum_{(r,s)\in T}[r/p]} \mid \det(\mathcal{L}\mathcal{N}) = D,$$

引理得证. □

定理 2. *设正整数 $q \ge 3$, χ 是模 q 的实原特征, 则对任意 $x \ge 3$, 有*

$$\sum_{\substack{p\le x\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p} \le \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log q + \log\log x + O(1).$$

证明. 当 $x < e^3$ 时,

$$\sum_{\substack{p\le x\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p} \le \sum_{p\le x}\frac{\log p}{p} = O(1),$$

定理显然成立, 当 $x<\sqrt{q}$ 时, 由 Mertens 定理知

$$\sum_{\substack{p\leq x\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p}\leq\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1)<\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{4}\log q+O(1),$$

定理亦成立, 因此以下假设 $x\geq\max\{e^3,\sqrt{q}\}$.

由 $|\overline{\alpha_i}|\leq|\alpha_i|\leq B$ 知 $\left|\partial_z^j f_{r,s}(z,w)|_{(z,w)=(\alpha_i,\overline{\alpha_i})}\right|\leq r(r-1)\cdots(r-j+1)B^{r+s}\leq r^jB^{r+s}$, 由 $r<x$, $s<x/k$ 和 $j<2x/k$ 知 $\left|\partial_z^j f_{r,s}(z,w)|_{(z,w)=(\alpha_i,\overline{\alpha_i})}\right|\leq x^{2x/k}B^{r+x/k}=B^r(x^2B)^{x/k}$, 由于 $k=\lceil\log(x^2B)\rceil$, 所以

$$(x^2B)^{x/k}=\exp\left(\frac{x}{k}\log\big(x^2B\big)\right)\leq\exp\left(\frac{x}{\log(x^2B)}\log\big(x^2B\big)\right)=e^x,$$

所以 $\mathcal{N}$ 中 (r,s) 对应的行中每个矩阵元的模长都不超过 B^re^x, 由 Hadamard 不等式知

$$D^2\leq\prod_{(r,s)\in T}|T|B^{2r}e^{2x},$$

故

$$\log|D|\leq\sum_{(r,s)\in T}\left(r\log B+x+\frac{1}{2}\log|T|\right)=\log B\sum_{(r,s)\in T}r+|T|x+\frac{|T|}{2}\log|T|,$$

已知

$$|T|<\frac{2x^2}{k}+2x\ll\frac{x^2}{k},$$

而显然矩形

$$\left\{(r,s)\in\mathbb{Z}^2:\frac{x}{3}<r<\frac{2x}{3},\,0\leq s<\frac{x}{3k}\right\}\subseteq T,$$

故

$$\sum_{(r,s)\in T}r\gg\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3k}=\frac{x^3}{27k}\gg x|T|,$$

$$|T|\log|T|\ll\frac{x^2\log x}{k}\ll\frac{x^3}{k}\ll\sum_{(r,s)\in T}r,$$

所以有

$$\log|D|\leq\log B\sum_{(r,s)\in T}r+O\left(\sum_{(r,s)\in T}r\right).$$

由于 $[r/p]>r/p-1$, 求和得

$$\sum_{(r,s)\in T}\left[\frac{r}{p}\right]>\frac{1}{p}\sum_{(r,s)\in T}r-|T|,$$

而由前一引理知

$$p^{\sum_{(r,s)\in T}[r/p]}\mid D$$

对所有 $k \le p \le x$, $\chi(p) = -1$ 的素数 p 都成立, 所以

$$\log|D| \ge \sum_{\substack{k\le p\le x\\ \chi(p)=-1}} \log p \sum_{(r,s)\in T} \left[\frac{r}{p}\right] > \sum_{\substack{k\le p\le x\\ \chi(p)=-1}} \frac{\log p}{p} \sum_{(r,s)\in T} r - \sum_{\substack{k\le p\le x\\ \chi(p)=-1}} \log p|T|,$$

而由素数定理知

$$\sum_{\substack{k\le p\le x\\ \chi(p)=-1}} \log p|T| \ll |T| \sum_{p\le x} \log p \ll x|T| \ll \sum_{(r,s)\in T} r,$$

所以有

$$\sum_{\substack{k\le p\le x\\ \chi(p)=-1}} \frac{\log p}{p} \sum_{(r,s)\in T} r < \log|D| + O\left(\sum_{(r,s)\in T} r\right) \le \log B \sum_{(r,s)\in T} r + O\left(\sum_{(r,s)\in T} r\right),$$

$$\sum_{\substack{k\le p\le x\\ \chi(p)=-1}} \frac{\log p}{p} < \log B + O\left(1\right),$$

再由 Mertens 定理得

$$\sum_{\substack{p<k\\ \chi(p)=-1}} \frac{\log p}{p} < \log k + O(1),$$

而

$$\log B = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log q + \frac{3}{2}\log 2 = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log q + O(1);$$
$$\log k = \log\log\left(x^2 B\right) + O(1) = \log\log x + O(1),$$

所以

$$\sum_{\substack{p\le x\\ \chi(p)=-1}} \frac{\log p}{p} \le \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log q + \log\log x + O(1),$$

定理得证. □

定理 3. 设正整数 $q \ge 3$, χ 是模 q 的实原特征, 若 β 是 $L(s,\chi)$ 的非平凡实零点, 则

$$(1-\beta)\log q \ge 1 - O\left(\frac{\log\log q}{\log q}\right),$$

特别的, 存在一个常数 $c > 0$, 使得

$$(1-\beta)\log q \ge c.$$

证明. 对任意实数 $\eta \in (0,1)$, 由于

$$\eta \int_p^\infty \frac{\log p}{p} x^{-1-\eta}\,\mathrm{d}x = \frac{\log p}{p^{1+\eta}},$$

对所有 $\chi(p)=-1$ 的素数求和得

$$\sum_{\chi(p)=-1}\frac{\log p}{p^{1+\eta}}=\eta\sum_{\chi(p)=-1}\int_p^\infty\frac{\log p}{p}x^{-1-\eta}\,\mathrm{d}x=\eta\int_1^\infty\left(\sum_{\substack{p\le x\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p}\right)x^{-1-\eta}\,\mathrm{d}x,$$

代入上一定理计算得

$$\begin{aligned}\sum_{\chi(p)=-1}\frac{\log p}{p^{1+\eta}}&\le\eta\int_1^\infty\left(\frac12\log x+\frac14\log q+\log\log x+O(1)\right)x^{-1-\eta}\,\mathrm{d}x+O(1)\\&=\frac{1}{2\eta}+\frac14\log q-\log\eta+O(1).\end{aligned}$$

当 s 是大于 1 的实数时, 由

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_p\frac{\log p}{p^s-1}$$

和

$$\sum_p\frac{\log p}{p^s-1}-\sum_p\frac{\log p}{p^s}=\sum_p\frac{\log p}{p^s(p^s-1)}<\infty$$

可知

$$\sum_p\frac{\log p}{p^s}=-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+O(1),$$

而

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{1}{s-1}+O(1),$$

所以

$$\sum_p\frac{\log p}{p^{1+\eta}}=\frac{1}{\eta}+O(1),$$

类似的有

$$\sum_p\frac{\chi(p)\log p}{p^{1+\eta}}=-\frac{L'}{L}(1+\eta,\chi)+O(1),$$

由于 χ 是实特征, 所以

$$2\sum_{\chi(p)=-1}\frac{\log p}{p^{1+\eta}}=\sum_p\frac{\log p}{p^{1+\eta}}-\sum_p\frac{\chi(p)\log p}{p^{1+\eta}}-\sum_{p|q}\frac{\log p}{p^{1+\eta}},$$

由 Mertens 定理得

$$\sum_{p|q}\frac{\log p}{p^{1+\eta}}<\sum_{\substack{p|q\\ p\le\log q}}\frac{\log p}{p}+\sum_{\substack{p|q\\ p>\log q}}\frac{\log p}{p}<\sum_{\substack{p|q\\ p\le\log q}}\frac{\log p}{p}+\frac{1}{\log q}\sum_{p|q}\log p\ll\log\log q,$$

所以

$$2\sum_{\chi(p)=-1}\frac{\log p}{p^{1+\eta}}=\frac{1}{\eta}+\frac{L'}{L}(1+\eta,\chi)+O(\log\log q),$$

故

$$\frac{L'}{L}(1+\eta,\chi) \le \frac{1}{2}\log q - 2\log\eta + O(\log\log q).$$

由 L 函数的 Hadamard 乘积公式知

$$\frac{L'}{L}(1+\eta,\chi) = \sum_{\rho} \mathrm{Re}\,\frac{1}{1+\eta-\rho} - \frac{1}{2}\log q + O(1) \ge \frac{1}{1+\eta-\beta} - \frac{1}{2}\log q + O(1),$$

其中不等式是因为各零点都满足 $\mathrm{Re}(1/(1+\eta-\rho)) \ge 0$, 求和中只保留 β 即可, 所以有

$$\frac{1}{1+\eta-\beta} \le \log q - 2\log\eta + O(\log\log q),$$

取

$$\eta = \frac{1}{(\log q)^2}$$

即得

$$\frac{1}{1+\eta-\beta} \le \log q + O(\log\log q),$$

$$(1-\beta)\log q \ge \frac{\log q}{\log q + O(\log\log q)} - \frac{1}{\log q} = 1 - O\left(\frac{\log\log q}{\log q}\right).$$

现取正整数 Q, 使得当 $q > Q$ 时总有

$$1 - O\left(\frac{\log\log q}{\log q}\right) > \frac{1}{2},$$

对于 $q \le Q$, 只有有限多个实零点, 逐个检查即可, 设

$$c_1 = \min\{(1-\beta)\log q : 3 \le q \le Q\} > 0,$$

取 $c = \min\{c_1, 1/2\}$ 即得定理结论. □

由于复特征对应的 L 函数一定不存在 Landau–Siegel 零点, 且 $q = 1$ 或 2 时也不存在 Landau–Siegel 零点, 而非原特征可以化为其对应的原特征, 它们的 L 函数在 $\mathrm{Re}(s) > 0$ 内的零点完全相同. 因此, 对任意正整数 q 及任意模 q 的 Dirichlet 特征 χ, $L(s,\chi)$ 均不存在 Landau–Siegel 零点.

3 虚二次域的类数

Tao 在 [8] 中提出挑战, 要求由 Landau-Siegel 零点不存在这一事实给出如下定理的新证明.

定理 4 (Gauss-Heegner)**.** *设正整数 d 无平方因子, 则虚二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ 的类数为 1 当且仅当 d 取以下 9 个值,*

$$d = 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163.$$

该定理最初由 Gauss 猜想, 后来由 Heegner 给出了优雅的证明, 相比之下, 通过排除 Landau–Siegel 零点来证明这一定理可能更容易理解, 但论证不如 Heegner 的优雅.

定理 5 (虚二次域的 Dirichlet 类数公式)**.** 设域 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, h_K 是其类数, w_K 是 K 中包含的单位根个数, D_K 是 K 的判别式, 则

$$h_K=\frac{w_K\sqrt{|D_K|}}{2\pi}L(1,\chi),$$

其中

$$\chi(\cdot)=\left(\frac{D_K}{\cdot}\right)$$

是 *Kronecker* 符号.

由于对于虚二次域

$$w_K=\begin{cases}6, & K=\mathbb{Q}(\sqrt{-3}),\\ 4, & K=\mathbb{Q}(i),\\ 2, & K \text{ 是其他虚二次域},\end{cases}$$

而我们只关心 $d>163$ 的情况, 类数公式可以简化为

$$h_K=\frac{\sqrt{|D_K|}}{\pi}L(1,\chi),$$

若 $h_K=1$, 则

$$L(1,\chi)=\frac{\pi}{\sqrt{|D_K|}}.$$

定理 6. 符号如上, 若 $h_K=1$, 则 $d<e^{100}$.

证明. 设 $q=|D_K|$, 设

$$\sum_{\substack{p\le x\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p}\le\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{4}\log q+\log\log x+C,$$

其中 C 是常数, 则当 $\eta\in(0,1/2]$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{\chi(p)=-1}\frac{\log p}{p^{1+\eta}}&=\eta\int_1^3\left(\sum_{\substack{p\le x\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p}\right)x^{-1-\eta}\,\mathrm{d}x+\eta\int_3^\infty\left(\sum_{\substack{p\le x\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p}\right)x^{-1-\eta}\,\mathrm{d}x\\ &\le\frac{\log 2}{2}\eta\int_2^3 x^{-1-\eta}\,dx+\eta\int_3^\infty\left(\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{4}\log q+\log\log x+C\right)x^{-1-\eta}\,\mathrm{d}x\\ &\le\frac{1}{2\eta}+\frac{1}{4}\log q-\log\eta+C_1,\end{aligned}$$

其中

$$C_1=C-\gamma+\frac{1}{2}+\frac{\log 2}{4}\log\frac{3}{2},$$

而

$$2\sum_{\chi(p)=-1}\frac{\log p}{p^s}=-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+\frac{L'}{L}(s,\chi)-\sum_{p\mid q}\frac{\log p}{p^s}-\sum_p\frac{\log p}{p^s(p^s-1)}+\sum_p\frac{\chi(p)^2\log p}{p^s(p^s-\chi(p))},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{L'}{L}(1+\eta,\chi) &\le 2\sum_{\chi(p)=-1}\frac{\log p}{p^{1+\eta}}+\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\eta)+\sum_{p\mid q}\frac{\log p}{p^{1+\eta}}+\sum_{p}\frac{\log p}{p^{1+\eta}(p^{1+\eta}-1)}\\ &< 2\sum_{\chi(p)=-1}\frac{\log p}{p^{1+\eta}}+\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\eta)+\log\log q+3-2\zeta'(2)\\ &\le \frac{\zeta'}{\zeta}(1+\eta)+\frac{1}{\eta}+\frac{1}{2}\log q-2\log\eta+\log\log q+C_2,\end{aligned}$$

其中

$$C_2=2C_1+3-2\zeta'(2).$$

对 η 积分得

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2}\frac{L'}{L}(1+\eta,\chi)\,\mathrm{d}\eta &\le \int_0^{1/2}\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\eta)+\frac{1}{\eta}\,\mathrm{d}\eta+1+\log 2+\frac{1}{4}\log q+\frac{1}{2}\log\log q+\frac{C_2}{2}\\ &=\frac{1}{4}\log q+\frac{1}{2}\log\log q+1+\log\zeta(3/2)+\frac{C_2}{2},\end{aligned}$$

由于

$$L(s,\chi)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\ge\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)},$$

取 $s=3/2$ 得

$$L(3/2,\chi)\ge\frac{\zeta(3)}{\zeta(3/2)},$$

于是

$$\int_0^{1/2}\frac{L'}{L}(1+\eta,\chi)\,\mathrm{d}\eta=\log L(3/2,\chi)-\log L(1,\chi)\ge\log\frac{\zeta(3)}{\zeta(3/2)}-\log L(1,\chi),$$

代入类数公式得

$$\int_0^{1/2}\frac{L'}{L}(1+\eta,\chi)\,\mathrm{d}\eta\ge\log\frac{\zeta(3)}{\zeta(3/2)}-\log\frac{\pi}{\sqrt{q}}=\frac{1}{2}\log q-\log\frac{\pi\zeta(3/2)}{\zeta(3)}.$$

比较上下界并整理得

$$\frac{1}{2}\log q-\log\frac{\pi\zeta(3/2)}{\zeta(3)}\le\frac{1}{4}\log q+\frac{1}{2}\log\log q+1+\log\zeta(3/2)+\frac{C_2}{2},$$

$$\frac{1}{4}\log q\le\frac{1}{2}\log\log q+C_3,$$

其中

$$C_3=\frac{C_2}{2}+1+\log\frac{\pi\zeta(3/2)^2}{\zeta(3)}=C-\gamma+3+\frac{\log 2}{4}\log\frac{3}{2}-\zeta'(2)+\log\frac{\pi\zeta(3/2)^2}{\zeta(3)}<C+6.4.$$

现在问题的关键就是确定常数 C, 将所有证明中的常数显式化可以证明 $C<16$ (见附录), 所以

$$\log q-2\log\log q\le 90,$$

数值计算得到满足该不等式的 q 的一个上界为 e^{100}, 而 $q=|D_K|$ 等于 d 或 d 的四倍, 所以 $d<e^{100}$, 定理得证. □

e^{100} 大约为 2.7×10^{43} 量级, 该上界太大, 逐一检验超出目前计算能力. 通过更细致的分析 [10] 可以将上界降到 $d<17000$, Tao 在 [8] 的评论区指出, 如果假设 L 函数在实部大于 7/8 的半平面内无零点, 可以证明 $d<655$, 这个上界已经足够小, 可以对小于它的 d 逐一验证.

A 附录

正文中需要用到以下经典定理.

定理 7 (Mertens 定理)**.** 对实数 $x\geq2$, 有

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1),$$

其中 $O(1)$ 可以换成显式的常数 2, 即

$$\left|\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}-\log x\right|\leq2.$$

定理 8 (Hadamard 不等式)**.** 设方阵 $A=(a_{ij})_{ij}\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, 则有

$$|\det A|^2\leq\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2,$$

等号成立当且仅当

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{a_{ki}}a_{kj}=0,\qquad i\neq j.$$

定理 9 (L 函数的 Hadamard 乘积)**.** 设 χ 是模 q 的实原特征, 设

$$a=\frac{1-\chi(-1)}{2}=\begin{cases}0, & \chi(-1)=1,\\ 1, & \chi(-1)=-1,\end{cases}$$

s 是大于 1 的实数, 则有

$$\frac{L'}{L}(s,\chi)=\sum_{\rho}\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho}-\frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi}-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+a}{2}\right),$$

其中 ρ 取遍 L 函数的非平凡零点.

证明. 对完备 L 函数

$$\Lambda(s,\chi)=\left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)L(s,\chi)$$

使用 Hadamard 乘积定理得

$$\Lambda(s,\chi)=\Lambda(0,\chi)e^{Bs}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho},$$

其中 ρ 取遍 Λ 的所有零点, B 是常数, 并且由 Λ 的函数方程易知

$$\operatorname{Re} B = -\sum_{\rho} \operatorname{Re} \frac{1}{\rho},$$

取对数导数得

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = B + \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{q} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+a}{2}\right) + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right),$$

取实部, 由于 χ 是实特征且 s 是实数, 所以

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{\rho} \operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+a}{2}\right),$$

定理得证. □

接下来说明正文第三节中的 $C < 16$.

Rosser–Schoenfeld [9] 关于 Chebyshev 界的改进给出

$$\sum_{p\le x} \log p < 1.01624x,$$

接下来我们比较 $|T|$ 和 $\sum_{(r,s)\in T} r$. 由 T 的定义知

$$|T| = \sum_{s=0}^{\lceil x/k\rceil-1} \lceil x-ks\rceil, \qquad \sum_{(r,s)\in T} r = \sum_{s=0}^{\lceil x/k\rceil-1}\sum_{r=0}^{\lceil x-ks\rceil-1} r,$$

记 $S = \lceil x/k\rceil - 1$, $m_s = \lceil x-ks\rceil$, 则

$$\sum_{(r,s)\in T} r = \sum_{s=0}^{S}\frac{m_s(m_s-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{S} m_s^2 - \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{S} m_s = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{S} m_s^2 - \frac{|T|}{2},$$

由 Cauchy–Schwarz 不等式得

$$|T|^2 = \left(\sum_{s=0}^{S} m_s\right)^2 \le (S+1)\sum_{s=0}^{S} m_s^2 = (S+1)\left(2\sum_{(r,s)\in T} r + |T|\right),$$

而

$$|T| \ge \sum_{s=0}^{S}(x-ks) = (S+1)\left(x - \frac{kS}{2}\right) \ge (S+1)\left(x-\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}(S+1),$$

所以

$$2(S+1)\sum_{(r,s)\in T} r \ge |T|^2 - (S+1)|T| \ge |T|\left(\frac{x}{2}(S+1) - (S+1)\right) = \frac{|T|(S+1)(x-2)}{2},$$

由于 $x \ge e^3 > 10$, 有 $(x-2)/2 \ge 2x/5$, 所以

$$\sum_{(r,s)\in T} r \ge \frac{|T|x}{5}.$$

接下来, 由

$$\sum_{\substack{k\le p\le x\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p}\sum_{(r,s)\in T}r<\log|D|+|T|\sum_{\substack{k\le p\le x\\ \chi(p)=-1}}\log p\le\log|D|+1.01624|T|x\le\log|D|+5.0812\sum_{(r,s)\in T}r$$

和

$$\log|D|\le\log B\sum_{(r,s)\in T}r+|T|x+\frac{|T|}{2}\log|T|\le\sum_{(r,s)\in T}r\left(\log B+5+\frac{5\log|T|}{2x}\right)$$

得

$$\sum_{\substack{k\le p\le x\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p}\le\log B+\frac{5\log|T|}{2x}+10.0812\le\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{4}\log q+\frac{5\log|T|}{2x}+\frac{3}{2}\log 2+10.0812,$$

由于 $|T|\le(S+1)(x+1)<(x+1)^2$, 所以

$$\frac{5\log|T|}{2x}<\frac{5\log(x+1)}{x}<\frac{5\log(e^3+1)}{e^3}<0.76,$$

$$\sum_{\substack{k\le p\le x\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p}<\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{4}\log q+0.76+\frac{3}{2}\log 2+10.0812<\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{4}\log q+12.$$

对于小素数,

$$\sum_{\substack{p<k\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p}\le\log k+2\le\log\bigl(\log\bigl(x^2B\bigr)+1\bigr)+2,$$

其中

$$\log\bigl(x^2B\bigr)=\frac{5}{2}\log x+\frac{1}{4}\log q+\frac{3}{2}\log 2\le 3\log x+\frac{3}{2}\log 2,$$

所以

$$\log\bigl(\log\bigl(x^2B\bigr)+1\bigr)+2\le\log\left(3\log x+1+\frac{3}{2}\log 2\right)+2\le\log\log x+3.303,$$

综上即得

$$\sum_{\substack{p\le x\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p}=\sum_{\substack{k\le p\le x\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p}+\sum_{\substack{p<k\\ \chi(p)=-1}}\frac{\log p}{p}\le\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{4}\log q+\log\log x+16.$$

参考文献

[1] OpenAI, *Uniform exclusion of Landau–Siegel zeros*, 1 October 2026, (`https://github.com/openai/math/blob/main/preprints/Uniform-exclusion-of-Landau-Siegel-zeros-October-1-2026/paper.pdf`).

[2] W. D. Banks, *On the OpenAI proof that Landau–Siegel zeros do not exist*, preprint v1, 11 October 2026, arXiv:2610.15483v1 (`https://arxiv.org/abs/2610.15483v1`).

[3] B. Kerr, *A simpler proof that there are no Landau–Siegel zeros*, preprint v1, 15 October 2026, arXiv:2610.21099v1 (https://arxiv.org/abs/2610.21099v1).

[4] B. Green, *On Landau–Siegel zeros*, preprint v2, 17 October 2026, hexagon:2610.00311v2 (https://hexagonmath.org/2610.00311v2).

[5] J. Pescador, *Landau–Siegel zeros and a Stepanov-type nonvanishing lemma*, preprint v3, 22 October 2026, (https://jacobpescador.github.io/ai-math/papers/landau-siegel-stepanov/).

[6] K. Barreto, *An elementary proof of the non-existence of Landau–Siegel zeros*, 19 October 2026, X post (https://x.com/acerfur/status/2112239827077026128).

[7] T. Tao, *A sketch of the proof of non-existence of Siegel zeroes*, 19 October 2026, *What's New* (https://terrytao.wordpress.com/2026/10/19/a-sketch-of-the-proof-of-non-existence-of-siegel-zeroes/).

[8] T. Tao, *An experimental AI-math challenge: using tenth discriminant bounds to explore arguments ruling out Siegel zeroes*, 20 October 2026, *What's New* (https://terrytao.wordpress.com/2026/10/20/an-experimental-ai-math-challenge-using-tenth-discriminant-bounds-to-explore-arguments-ruling-out-siegel-zeroes/).

[9] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois Journal of Mathematics, **6** (1962), no. 1, 64–94, (https://doi.org/10.1215/ijm/1255631807).

[10] R. van Dijk, *A proof Gauss might have found*, preprint v1, 26 October 2026, hexagon:2610.00568v1 (https://hexagonmath.org/2610.00568v1).