

人类如何构造雅可比猜想的反例

QED

2026 年 8 月 1 日

本文只讨论复数域 $\mathbb{C}$ 上的情况, 但大部分内容对于特征 0 的代数闭域也成立 (Lefschetz 原理, 可见冯琦《数理逻辑引导》定理 8.12).

雅可比猜想

设 $F = (f_1, f_2, \dots, f_n): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ 为多项式映射, 其雅可比行列式记作

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right)$$

或

$$\det J_F = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

关于雅可比行列式, 有几点初等的观察.

定理 1. 若 F 的雅可比行列式 $\det J_F$ 无根, 则 $\det J_F$ 必为非零常数.

事实上, 任何多项式映射 $p: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 若无根, 则一定是非零常数, 这可由希尔伯特零点定理推出, 也可使用代数基本定理加归纳法得到, 而 $\det J_F$ 当然是 $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 的多项式映射.

定理 2. 若 F 是多项式同构, 则 $\det J_F$ 是非零常数.

多项式同构的意思是, 存在多项式映射 $G: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ 使得 $F \circ G = G \circ F = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$, 则由行列式的性质知 $(\det J_F)(\det J_G) = 1$, 因此 $\det J_F$ 必是非零常数.

定理 3. F 的雅可比行列式 $\det J_F$ 非零当且仅当 F 局部可逆, 即对任意一点 $x \in \mathbb{C}^n$, 存在 x 的邻域 $U \subseteq \mathbb{C}^n$ 使得 F 是从 U 到 $F(U)$ 的双射.

由全纯版本的反函数定理可知 $\det J_F$ 非零推出 F 局部可逆, 而由魏尔斯特拉斯预备定理可知 F 局部可逆推出 $\det J_F$ 非零.

1939 年, Keller 提出以下猜想.

猜想 1 (雅可比猜想). 设 $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ 是一个多项式映射, 如果其雅可比行列式 $\det J_F$ 是一个非零常数, 则 F 必为多项式自同构.

本文的目标是寻找雅可比猜想的反例, 若 F 是一个反例, 则有两种情况, 第一种情况是 F 局部单但不单, 自然不可能是多项式同构, 第二种情况是 F 双, 但其逆不是多项式映射, 事实上第二种情况是不可能的.

定理 4. 若 F 是单射, 则 F 的雅可比行列式是非零常数, 并且 F 是双射且逆也是多项式映射.

首先 F 单自然蕴含 F 局部单, 所以其雅可比行列式是非零常数. 其次, 著名的 Ax-Grothendieck 定理知 F 若单则必满 (该定理可由代数几何方法证明, 也可由数理逻辑方法证明, 可见冯琦《数理逻辑引导》中定理 8.13). 最后, 由 Zariski 主定理的一个简单版本可推出 F 的逆也是多项式映射.

在 $n = 1$ 时, 容易验证猜想成立, 因为雅可比行列式无非就是 $F'(x)$, 若它是常数, 则 $F(x)$ 必然是线性映射, 不妨设为 $ax + b$, 其中 $a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}$, F 显然可逆, 其逆为 $G(x) = (x - b)/a$, 也是多项式映射.

在 $n = 2$ 时, 猜想仍然开放.

在 $n \geq 3$ 时, 猜想不成立, 反例由 Levent Alpöge 于 2026 年 7 月 19 日发表, 反例为

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)), \\ f_1(x, y, z) &= (1 + xy)^3 z + y^2(1 + xy)(4 + 3xy), \\ f_2(x, y, z) &= y + 3x(1 + xy)^2 z + 3xy^2(4 + 3xy), \\ f_3(x, y, z) &= 2x - 3x^2 y - x^3 z, \end{aligned}$$

其雅可比行列式 $\det J_F = -2$ 且 $F(0, 0, -1/4) = F(1, -3/2, 13/2) = F(-1, 3/2, 13/2) = (-1/4, 0, 0)$, 因此不是双射, 更不可能是多项式同构. 容易由此构造出 $n > 3$ 时的反例, 只需将其他分量设为恒等映射即可, 例如 $n = 4$ 时反例即为

$$F(x, y, z, w) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z), w).$$

对于该反例, ChatGPT 给出了一个几何解释, 之后, Terence Tao 基于该解释给出了一篇更详细的解释文章, 本文基于这些资料.

预备知识

设 M 是 R -模, 其对称代数定义为

$$\mathrm{Sym}(M) = T(M)/I,$$

其中 $T(M)$ 为张量代数 $(\bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{\otimes n})$, I 是由 $\{a \otimes b - b \otimes a : a, b \in M\}$ 生成的理想, $\mathrm{Sym}(M)$ 是一个分次代数, 其第 n 次分量记为 $\mathrm{Sym}^n(M)$, 称为 n 次对称幂. 当 M 是有限维向量空间时, 例如 $M \cong \mathbb{C}^n$, 对称代数显然同构于 n 元多项式环

$$\mathrm{Sym}(M) \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n],$$

而其中 n 次对称幂就是 n 次齐次多项式组成的集合. 本文只用到 $M = \mathbb{C}^2$ 的情况,

$$\mathrm{Sym}^1(\mathbb{C}^2) = \{az + bw : a, b \in \mathbb{C}\} \cong \{(a, b) : a, b \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^2,$$

$$\mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^2) = \{cz^2 + dzw + ew^2 : c, d, e \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^3,$$

$$\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2) = \{Az^3 + Bz^2w + Czw^2 + Dw^3 : A, B, C, D \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^4.$$

对于一个二元齐次多项式 $p(z, w)$, 若 (z_0, w_0) 是其根, 由齐次性知对任意复数 $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda z_0, \lambda w_0)$ 也是 p 的根, 除去平凡根 $(0, 0)$ 外, 其他的根可以看做取值于射影直线 $\mathbb{CP}^1$ 上, 记以齐次坐标 $[z : w]$, 并且有到黎曼球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 的双射 $[z : w] \mapsto z/w$. 本文经常将射影直线 $\mathbb{CP}^1$ 与黎曼球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 混同.

反例的构造

我们的目标是构造一个满足以下三个性质的多项式映射 $F: X \rightarrow \mathbb{C}^3$, 其中 X 是一个三维代数簇,

- F 是局部单射,
- F 不是单射,
- X 与 $\mathbb{C}^3$ 之间有一个多项式同构.

由之前的讨论知, 局部单射等价于雅可比行列式是非零常数, 则将 F 与多项式同构 $\mathbb{C}^3 \rightarrow X$ 复合起来就得到了雅可比猜想的反例.

我们逐步实现这三个目标, 第二个目标是最容易, 我们的构造始于这样一个映射.

$$\begin{aligned} F: \mathrm{Sym}^1(\mathbb{C}^2) \times \mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^2) &\rightarrow \mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2) \\ (L, Q) &\mapsto LQ, \end{aligned}$$

具体来说, 假设 $L(z, w) = az + bw$, $Q(z, w) = cz^2 + dzw + ew^2$, 则

$$L(z, w)Q(z, w) = (az + bw)(cz^2 + dzw + ew^2) = acz^3 + (ad + bc)z^2w + (ae + bd)zw^2 + bew^3,$$

由 $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^2) \cong \mathbb{C}^{k+1}$ 知这等价于映射

$$F': \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^4$$

$$(a, b, c, d, e) \mapsto (ac, ad + bc, ae + bd, be),$$

这显然是多项式映射, 以后我们不区分 F 和 F' . 我们使用一种构造性的方法来证明 F 不是单射, 即满足性质 b, 设 $P(z, w) \in \text{Sym}^3(\mathbb{C}^2)$, P 是三次齐次多项式, 因此可以因式分解为三个一次齐次多项式的积, 假设为 $P = L_1L_2L_3$, 于是

$$F(L_1, L_2L_3) = F(L_2, L_1L_3) = F(L_3, L_1L_2) = P.$$

例如, 取 $P(z, w) = z^2w - w^3/4$, 它的三个根分别为 $\infty, 1/2, -1/2$, 对应的三个一次齐次多项式分别为 $w, z - w/2, z + w/2$, 所以

$$F\left(w, z^2 - \frac{1}{4}w^2\right) = F\left(z - \frac{1}{2}w, zw + \frac{1}{2}w^2\right) = F\left(z + \frac{1}{2}w, zw - \frac{1}{2}w^2\right) = z^2w - \frac{w^3}{4},$$

这个例子可能看起来略微复杂或奇怪, 但后面我们会看到这个例子是刻意选的.

函数 F 还有一些很好的性质, 这些性质将帮助我们修改 F 使其成为真正的反例. 首先, 对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, 显然

$$F(\lambda L, \lambda^{-1}Q) = F(L, Q).$$

其次, 每个 $T \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ 都按照分式线性变换定义了一个线性换元, 例如 $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ 定义了换元 $(z, w) \mapsto (\alpha z + \beta w, \gamma z + \delta w)$, 我们将 L 换元后得到的多项式记为 $L \circ T$, 于是容易验证 F 满足性质

$$F(L \circ T, Q \circ T) = F(L, Q) \circ T.$$

第一步: 限制定义域以得到性质 a

现在希望通过限制 F 的定义域在保持性质 b 的情况下得到性质 a, 即局部单射性, 基本的想法是分离多项式 L 和 Q 的根, 这使得在很小的邻域里都可以由 P 复原出 L 和 Q , 从而有局部单射性. 衡量根的差距的不变量是结式, L 和 Q 的结式记为 $\text{Res}(L, Q)$, 在我们的情况下, 其定义为

$$\text{Res}(L, Q) = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ c & d & e \end{vmatrix} = a^2e - abd + cb^2.$$

结式还有一些很好的性质, 直接验证可得

$$\text{Res}(\lambda L, \lambda^{-1} Q) = \lambda \text{Res}(L, Q),$$

通过更复杂的计算可以验证

$$\text{Res}(L \circ T, Q \circ T) = \text{Res}(L, Q),$$

此外, 结式等于 0 当且仅当 L 和 Q 的根有重合, 因此我们可以要求 $\text{Res}(L, Q) = 1$ 作为我们限制定义域的条件, F 的定义域变为

$$\mathcal{R} = \{(L, Q) \in \text{Sym}^1(\mathbb{C}^2) \times \text{Sym}^2(\mathbb{C}^2) : \text{Res}(L, Q) = 1\}$$

或

$$\mathcal{R} = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{C}^5 : a^2 e - abd + cb^2 = 1\},$$

这显然是 $\mathbb{C}^5$ 中的一个四维代数簇.

性质 a 和 b 的验证

我们首先验证限制定义域不会使得 F 丢失性质 b, 由结式的放缩性质 $\text{Res}(\lambda L, \lambda^{-1} Q) = \lambda \text{Res}(L, Q)$ 知, 一对 (L, Q) 只要 $\text{Res}(L, Q)$ 非零, 总能通过归一化使得 $\text{Res}(\lambda L, \lambda^{-1} Q) = 1$, 并且 $F(\lambda L, \lambda^{-1} Q) = F(L, Q)$ 不变, 所以原本多对一的点总是可以归一化到 $\mathcal{R}$ 上, 并且仍然是多对一的. 容易看出, 像集中的任意一点在 $\mathcal{R}$ 中至多只有三个原像, 分别为 $(L_1, L_2 L_3)$, $(L_2, L_1 L_3)$ 和 $(L_3, L_1 L_2)$ 的归一化.

例如在我们的例子中, 直接计算可得 $(w, z^2 - \frac{1}{4}w^2)$ 和 $(z - \frac{1}{2}w, zw + \frac{1}{2}w^2)$ 的结式都是 1, 而 $(z + \frac{1}{2}w, zw - \frac{1}{2}w^2)$ 的结式是 -1, 我们取 $\lambda = -1$, 将它转化成 $(-z - \frac{1}{2}w, -zw + \frac{1}{2}w^2)$, 结式就变成了 1, 并且像不变, 这样就得到了 $\mathcal{R}$ 中的三个点 $(w, z^2 - \frac{1}{4}w^2)$, $(z - \frac{1}{2}w, zw + \frac{1}{2}w^2)$ 和 $(-z - \frac{1}{2}w, -zw + \frac{1}{2}w^2)$, 它们都被映到同一个点.

接下来验证限制定义域后的 F 满足性质 a. 选定一点 $(a_0, b_0, c_0, d_0, e_0) \in \mathcal{R}$, 假设 $a_0 \neq 0$, 设 $T = \begin{pmatrix} b_0 & \frac{1}{a_0} \\ -a_0 & 0 \end{pmatrix}$, 显然 $\det T = 1$, 则由它定义的换元使得 $L_0(z, w) = a_0 z + b_0 w$ 变成 $L_0 \circ T = w$, $Q_0(z, w) = c_0 z^2 + d_0 zw + e_0 w^2$ 变成 $z^2 + D_0 zw + E_0 w^2$, 其中 $D_0 = \frac{2b_0 c_0}{a_0} - d_0$, $E_0 = \frac{e_0}{a_0^2}$. 现假设 F 在 $(0, 1, 1, D_0, E_0)$ 处为局部单射, 由 T 可逆及 F 与 T 可交换知 F 必然在 $(a_0, b_0, c_0, d_0, e_0)$ 处也是局部单射. 于是可以只考虑 $a_0 = 0$ 的情况.

当 $a_0 = 0$ 时, $L_0 = b_0 w$, 其根为无穷远点 $[1 : 0]$, 约定无穷远点的模为无穷大. 此时 $\text{Res}(L_0, Q_0) = c_0 b_0^2 = 1$, 因此 c_0 和 b_0 一定都非零. 此外, 由结式非零知 Q_0 的两个根一定不是

无穷远点, 则它们 (在黎曼球面上) 的模都是有限值. 现取

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{|c_0|}{2}, 1, \frac{|b_0|}{\frac{2(|d_0|+1)}{|c_0|} + \frac{2(|e_0|+1)}{|c_0|} + 2} \right\},$$

由 c_0 和 b_0 非零知 $\varepsilon > 0$, 取邻域

$$U = \{(a, b, c, d, e) \in \mathcal{R} : |a| < \varepsilon, |b - b_0| < \varepsilon, |c - c_0| < \varepsilon, |d - d_0| < \varepsilon, |e - e_0| < \varepsilon\},$$

设 $P = LQ \in F(U)$, P 的三个根为 s_1, s_2, s_3 , 其中 s_1 是 L 的根, 则

$$s_1 = \begin{cases} -\frac{b}{a}, & a \neq 0, \\ \infty, & a = 0, \end{cases}$$

不管哪种情况, 都有

$$|s_1| > \frac{|b_0| - \varepsilon}{\varepsilon}.$$

而 s_2 和 s_3 是 Q 的根, 由韦达定理知

$$s_2 + s_3 = -\frac{d}{c}, \quad s_2 s_3 = \frac{e}{c},$$

其中 c 不为零是因为 $|c - c_0| < \varepsilon \leq |c_0|/2$, 则 $|c| > |c_0|/2$. 而

$$|s_2 + s_3| \leq \frac{|d_0| + \varepsilon}{|c_0|/2} = \frac{2(|d_0| + \varepsilon)}{|c_0|} \leq \frac{2(|d_0| + 1)}{|c_0|},$$

$$|s_2 s_3| \leq \frac{|e_0| + \varepsilon}{|c_0|/2} = \frac{2(|e_0| + \varepsilon)}{|c_0|} \leq \frac{2(|e_0| + 1)}{|c_0|},$$

由以下引理知

$$|s_2| \leq \frac{2(|d_0| + 1)}{|c_0|} + \frac{2(|e_0| + 1)}{|c_0|} + 1,$$

$$|s_3| \leq \frac{2(|d_0| + 1)}{|c_0|} + \frac{2(|e_0| + 1)}{|c_0|} + 1.$$

引理 1. 设 $s_2, s_3 \in \mathbb{C}$, 若存在 $A, B \in \mathbb{R}_{>0}$ 使得

$$|s_2 + s_3| \leq A, \quad |s_2 s_3| \leq B,$$

则

$$|s_2| \leq A + B + 1, \quad |s_3| \leq A + B + 1.$$

证明. 假设 $|s_2| > A + B + 1$, 则

$$|s_3| = \frac{|s_2 s_3|}{|s_2|} \leq \frac{B}{A + B + 1} < 1,$$

于是

$$|s_2 + s_3| \geq |s_2| - |s_3| > (A + B + 1) - 1 = A + B > A,$$

与 $|s_2 + s_3| \leq A$ 矛盾, 故 $|s_2| \leq A + B + 1$, 同理 $|s_3| \leq A + B + 1$. $\square$

由 ε 的取值知

$$\frac{|b_0| - \varepsilon}{\varepsilon} \geq \frac{2(|d_0| + 1)}{|c_0|} + \frac{2(|e_0| + 1)}{|c_0|} + 1,$$

所以存在只关乎 b_0, c_0, d_0, e_0 的常数 M 将 s_1 与 s_2 和 s_3 分离开来, 使得 s_1 接近无穷远点而 s_2 和 s_3 有界.

若存在 $(L', Q') \in U$, 且 $P = L'Q'$, 则 L' 的根必为 s_1, s_2, s_3 其中之一, 将以上讨论应用到 L' 和 Q' 上, 则存在常数分离 L' 的根和 Q' 的两个根, 所以 L' 的根只能是 s_1 , 由结式归一化条件知必有 $L = L'$, 从而也有 $Q = Q'$.

综上可知 F 是一个局部单射, 也等价于说 F 的雅可比行列式为非常数.

第二步: 限制值域以得到性质 c

截止目前, 我们已经得到了一个从 $\mathcal{R}$ 到 $\mathbb{C}^4$ 的多项式映射, 但它还不是反例, 因为 $\mathcal{R}$ 不与 $\mathbb{C}^4$ 多项式同构. 接下来的目标是限制值域到 $\mathbb{C}^4$ 中的一个三维超平面, 假设为 S , 这等价于限制定义域为

$$\mathcal{R} \cap F^{-1}(S),$$

我们希望它多项式同构于 $\mathbb{C}^3$.

在值域

$$\mathbb{C}^4 \cong \{Az^3 + Bz^2w + Czw^2 + Dw^3 : A, B, C, D \in \mathbb{C}\},$$

中最简单的选取三维超平面的方法就是将 A, B, C, D 中其中之一固定为常数, 事实证明, 固定 B 为 1 是有效的选法, 至于为什么这样选, Tao 说他也不知道, 并称这为“仿射奇迹”.

对应到定义域, 让第二个分量等于 1, 就是要求 $ad + bc = 1$, 即定义域限制为

$$X = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{C}^5 : a^2e - abd + cb^2 = 1, ad + bc = 1\},$$

首先, 性质 a 当然是保持的, 因为 X 是 $\mathcal{R}$ 的子集, 在子集上当然保持局部单射性. 其次, 性质 b 也仍保持, 添加的这一条件不足以排除被映到同一点的三个点中的两个, 继续看我们的例子, $(w, z^2 - \frac{1}{4}w^2)$, $(z - \frac{1}{2}w, zw + \frac{1}{2}w^2)$ 和 $(-z - \frac{1}{2}w, -zw + \frac{1}{2}w^2)$ 都满足 $ad + bc = 1$, 因此也都在 X 中. 由此可见将 F 限制到 X 上不会破坏性质 a 和 b.

性质 c 的验证

假设 $X = X_0 \cup X_1$, 其中 X_0 定义为 $a = 0$ 的部分, X_1 定义为 $a \neq 0$ 的部分.

首先考虑 $a \neq 0$ 的情形, 此时可以直接使用 a, b, c 将 d 和 e 表示出来,

$$d = \frac{1-bc}{a}, \quad e = \frac{1+b-2b^2c}{a^2},$$

于是得到 $X_1 \cong \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : a \neq 0\}$.

再考虑 $a = 0$ 的情况, 此时两个条件变为 $b^2c = 1$ 和 $bc = 1$, 解得 $b = c = 1$, 因此 $X_0 = \{(0, 1, 1, d, e) : d, e \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^2$.

这看起来已经很有希望了, X 的一部分同构于缺少一个平面的三维空间, 另一部分恰好同构于一个平面, 只要在 $a \rightarrow 0$ 的时候不会出现什么奇怪的事, 就应该能想办法把这两部分拼起来, 得到 X 到 $\mathbb{C}^3$ 的多项式同构.

Tao 的直觉是, 当 $a \rightarrow 0$ 时, d 和 e 的行为不会变得奇怪, 也就是说, $1-bc$ 应该至少是以 $O(a)$ 的速度趋于 0, 而 $1+b-2b^2c$ 则至少以 $O(a^2)$ 的速度趋于 0.

由 $ad+bc=1$ 知 $bc=1-ad$, $b^2c=b-abd$, 而又 $cb^2=1-a^2e+abd$, 所以 $b=1+2abd-a^2e$, 设 $y=2bd-ae$, 则 $b=1+ya$.

将 $b=1+ya$ 代入 $bc=1-ad$ 得 $c+yac=1-ad$, 即 $c=1-a(d+cy)$.

将 $b^2c=b-abd$ 和 $cb^2=1-a^2e+abd$ 加起来得到 $2cb^2=1+b-a^2e$, 代入 $b=1+ya$ 得到

$$\begin{aligned} 2c(1+2ya+y^2a^2) &= 2+ya-a^2e, \\ c &= 1+\frac{1}{2}ya-2cya-\frac{1}{2}a^2e-cy^2a^2, \end{aligned}$$

将 $c=1-a(d+cy)$ 代入第二项 $-2cya$ 得

$$c = 1 + \frac{1}{2}ya - 2(1-a(d+cy))ya - \frac{1}{2}a^2e - cy^2a^2 = 1 - \frac{3}{2}ya + \left(cy^2 + 2yd - \frac{1}{2}e\right)a^2,$$

设 $z = cy^2 + 2yd - \frac{1}{2}e$, 代入 $y = 2bd - ae$ 得

$$z = 4b^2cd^2 - 4abcde + a^2ce^2 + 4bd^2 - 2aed - \frac{1}{2}e,$$

代入 $ad=1-bc$ 和 $a^2e=1-cb^2+bad=1-2cb^2+b$ 得

$$\begin{aligned} z &= 4b^2cd^2 + 4bd^2 + ce - bce + 2b^2c^2e - \frac{5}{2}e \\ &= 2((2b^2c-b-1)d^2 + (bc-1)^2e) + 2d^2 + ce + 6bd^2 + 3bce - \frac{9}{2}e \\ &= 2(-a^2ed^2 + a^2d^2e) + 2d^2 + ce + 6bd^2 + 3bce - \frac{9}{2}e \\ &= 2d^2 + ce + 6bd^2 + 3bce - \frac{9}{2}e. \end{aligned}$$

将 $b = 1 + ya$ 和 $c = 1 - \frac{3}{2}ya + za^2$ 代入 $d = \frac{1-bc}{a}$ 得

$$d = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}y^2a - za - yza^2.$$

再将 $b = 1 + ya$ 和 $c = 1 - \frac{3}{2}ya + za^2$ 代入 $e = \frac{1+b-\frac{2b^2c}{a^2}}{a^2}$ 得

$$e = 4y^2 - 2z + 3y^3a - 4yza - 2y^2za^2.$$

综上, 我们得到了从 X 到 $\mathbb{C}^3$ 的多项式映射

$$\varphi: (a, b, c, d, e) \mapsto (a, y, z), \quad \begin{cases} a = a, \\ y = 2bd - ae, \\ z = 2d^2 + ce + 6bd^2 + 3bce - \frac{9}{2}e, \end{cases}$$

其逆为

$$\varphi^{-1}: (a, y, z) \mapsto (a, b, c, d, e), \quad \begin{cases} a = a, \\ b = 1 + ya, \\ c = 1 - \frac{3}{2}ya + za^2, \\ d = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}y^2a - za - yza^2, \\ e = 4y^2 - 2z + 3y^3a - 4yza - 2y^2za^2. \end{cases}$$

也是多项式映射, 因此 $X \cong \mathbb{C}^3$.

得到最终反例

我们已经验证 F 限制在 X 上满足性质 a, b 和 c, 只需将 F 与 φ^{-1} 复合, 得到

$$G = F \circ \varphi^{-1}: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$$

$$(a, y, z) \mapsto (G_1(a, y, z), G_2(a, y, z), G_3(a, y, z)),$$

$$\begin{cases} G_1(a, y, z) = a - \frac{3}{2}ya^2 + za^3, \\ G_2(a, y, z) = \frac{1}{2}y + 6y^2a - 3za + \frac{9}{2}y^3a^2 - 6yza^2 - 3y^2za^3, \\ G_3(a, y, z) = 4y^2 - 2z + 7y^3a - 6yza + 3y^4a^2 - 6y^2za^2 - 2y^3za^3. \end{cases}$$

直接计算可得它的雅可比行列式 $\det J_G = -1$.

回忆我们之前的例子, $(w, z^2 - \frac{1}{4}w^2)$, $(z - \frac{1}{2}w, zw + \frac{1}{2}w^2)$ 和 $(-z - \frac{1}{2}w, -zw + \frac{1}{2}w^2)$ 在 $\mathbb{C}^5$ 中对应的点分别为 $(0, 1, 1, 0, -\frac{1}{4})$, $(1, -\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{2})$ 和 $(-1, -\frac{1}{2}, 0, -1, \frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned}\varphi\left(0, 1, 1, 0, -\frac{1}{4}\right) &= \left(0, 0, \frac{1}{8}\right), \\ \varphi\left(1, -\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}\right) &= \left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{13}{4}\right), \\ \varphi\left(-1, -\frac{1}{2}, 0, -1, \frac{1}{2}\right) &= \left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{13}{4}\right),\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}G\left(0, 0, \frac{1}{8}\right) &= \left(0, 0, -\frac{1}{4}\right), \\ G\left(1, -\frac{3}{2}, -\frac{13}{4}\right) &= \left(0, 0, -\frac{1}{4}\right), \\ G\left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{13}{4}\right) &= \left(0, 0, -\frac{1}{4}\right),\end{aligned}$$

就是 G 的多对一的点.

我们已经得到了雅可比行列式的一个反例, 它和 Levent 最初的反例有一点差异, 但可以通过换元转化. 定义 $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$, $f_1(x, y, z) = G_3(x, y, -\frac{z}{2})$, $f_2(x, y, z) = 2G_2(x, y, -\frac{z}{2})$, $f_3(x, y, z) = 2G_1(x, y, -\frac{z}{2})$, 即

$$F: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)),$$

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 4y^2 + z + 7y^3x + 3yzx + 3y^4x^2 + 3y^2zx^2 + y^3zx^3, \\ f_2(x, y, z) = y + 12y^2x + 3zx + 9y^3x^2 + 6yzx^2 + 3y^2zx^3, \\ f_3(x, y, z) = 2x - 3yx^2 - zx^3, \end{cases}$$

$(0, 0, \frac{1}{8})$, $(1, -\frac{3}{2}, -\frac{13}{4})$ 和 $(-1, \frac{3}{2}, -\frac{13}{4})$ 则变为 $(0, 0, -\frac{1}{4})$, $(1, -\frac{3}{2}, \frac{13}{2})$ 和 $(-1, \frac{3}{2}, \frac{13}{2})$, 它们被映为 $(-\frac{1}{4}, 0, 0)$, 与原始反例相同.