

# 格点, 最密堆积, 魔群以及顶点代数

QED

2026 年 7 月 30 日

## 1 格点与最密堆积

### 1.1 格点

我们假设讨论的格点都是满秩的.

**定义 1** (格). 在  $\mathbb{R}^n$  中的  $n$  个线性无关的向量  $v_1, \dots, v_n$  生成的自由阿贝尔群

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n k_i v_i : k_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n \right\}$$

称为  $\mathbb{R}^n$  中的一个格.

诸生成元向量在标准基下有表示

$$v_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$

$$v_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),$$

$$\vdots$$

$$v_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}),$$

则矩阵  $M = (v_1, \dots, v_n)^T$  称为该格的生成元矩阵, 生成元矩阵完全确定了其格, 而一个格可能有多个生成元矩阵, 例如  $-M$  和  $M$  是同一个格的生成元矩阵. 定义格的基本区域为

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \theta_i v_i : 0 \leq \theta_i < 1, 1 \leq i \leq n \right\},$$

由线性代数知, 其体积为  $|\det M|$ , 我们以  $\det \Lambda$  记格的基本区域的体积的平方, 即  $\det \Lambda = (\det M)^2$ , 容易证明这是格的一个不变量, 与生成元的选取无关.

若一个格的基本区域的体积为 1, 则称该格为**幺模**的, 即  $\Lambda$  幺模当且仅当  $\det \Lambda = 1$ .

格有以下基本操作, 缩放即为  $M$  乘一个非零实数, 旋转即为  $M$  右乘一个正交矩阵  $O$ , 换基即为  $M$  左乘一个行列式为  $\pm 1$  的整数矩阵  $U$ . 两个格**等价**或**相似**当且仅当它们可以通过旋转, 反射和缩放互相转换, 等价关系记为  $\cong$ , 假设两个格的生成元矩阵为  $M$  和  $N$ , 则它们等价当且仅当存在  $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $U \in \{A : A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z}), \det A = \pm 1\}$  和  $O \in O_n(\mathbb{R})$  使得

$$N = cUMO.$$

若一个格中的任意元素  $x$ ,  $x \cdot x$  都是整数, 则称该格是一个**整格**.

若一个格中的任何格点  $x$  都满足  $x \cdot x$  为偶数, 则称该格为**偶格**, 为奇数则是**奇格**.

**定义 2** (对偶格). 设  $\Lambda$  是  $\mathbb{R}^n$  中的格, 定义其对偶格为

$$\Lambda^* = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \in \mathbb{Z}, \forall u \in \Lambda\}$$

容易验证对偶格确实是格, 因为若  $\Lambda$  的生成元矩阵为  $M$ , 则以  $(M^{-1})^T$  生成的格就是  $\Lambda$  的对偶格.

若满足  $\Lambda = \Lambda^*$ , 则称  $\Lambda$  是**自对偶**的.

整格有很多好的性质, 由定义立刻知  $\Lambda \subseteq \Lambda^*$ , 由于格均为交换群, 可以讨论其指标  $[\Lambda^* : \Lambda]$ , 直观来看有

$$[\Lambda^* : \Lambda] = \frac{\sqrt{\det \Lambda}}{\sqrt{\det \Lambda^*}} = \frac{|\det M|}{|\det M^{-1}|} = (\det M)^2 = \det \Lambda,$$

因此整格自对偶当且仅当其幺模, 今后我们对整格不区分这两个术语.

奇的幺模格称为 **I 型**的, 偶的幺模格称为 **II 型**的.

**定义 3** (自同构群). 设  $\Lambda$  是  $\mathbb{R}^n$  中的格, 定义其自同构群为

$$\text{Aut}(\Lambda) = \{O \in O_n(\mathbb{R}) : O(\Lambda) = \Lambda\},$$

其中我们将矩阵看  $O$  作  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  的映射.

若格  $\Lambda$  有生成元矩阵  $M$ , 则正交矩阵  $O \in \text{Aut}(\Lambda)$  当且仅当  $MOM^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ . 此外, 假设  $M$  和  $N$  均为  $\Lambda$  的生成元矩阵, 则  $M^{-1}N$  显然是  $\Lambda$  的一个自同构, 因此  $M^{-1}N$  是正交矩阵, 且  $MM^{-1}NM^{-1} = NM^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ , 这就是说, 两个满秩矩阵  $M$  和  $N$  是同一个格的生成元矩阵当且仅当存在  $U \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ ,  $\det U = \pm 1$  且  $N = UM$ . 这显然蕴含  $\det \Lambda = (\det N)^2 = (\det UM)^2 = (\det M)^2$ , 即基本区域的体积与基元选取无关.

## 1.2 最密堆积

球体堆积问题指在  $n$  维空间中如何尽可能高效率的摆放球体, 本文我们只考虑格点堆积, 不考虑非格点堆积. 对于格点堆积, 每个球体的球心都位于一个格点处, 所以球的半径相同, 并且要求半径尽可能大  $r = \frac{1}{2} \inf\{|x - y| : x, y \in \Lambda, x \neq y\}$ , 即球必须尽可能相切 (单个球的相切球数量的最大值称为该格的亲吻数), 格点堆积的密度定义为基本区域内球体的体积与基本区域体积的比值

$$\Delta = \frac{\omega_n r^n}{\sqrt{\det \Lambda}},$$

其中  $\omega_n$  为  $n$  维单位球体积, 这是直观的, 显然密度与球半径或格点缩放大小无关, 等价的格有相同的密度. 使得密度最高的堆积方式称为最密堆积. 尽管我们只考虑格点堆积, 但对于大多数维数, 我们不知道格点堆积是否比非格点堆积更优.

一维中, 密度显然可以达到 1, 对应的格点为  $\mathbb{Z}$ . 二维中最密堆积称为六边形格, 生成元为  $(2, 0)$  和  $(1, \sqrt{3})$ , 生成的格形如蜂巢状, 其密度为  $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ . 三维中的最密堆积称为面心立方堆积, 生成元为  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$  和  $(0, 1, 1)$ , 其密度为  $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$ , 三维中还存在另一种密度相同的非格点堆积, 称为六方最密堆积, 这两种堆积的最密性称为开普勒猜想, 目前已被证明. 至于 4 到 7 维空间, 最密的格点堆积问题已解决 ( $D_4, D_5, E_6, E_7$ , 见下文), 而最密堆积问题仍开放. 此外, 8 和 24 维的最密堆积问题已解决, 分别由格点  $E_8$  格和 Leech 格  $\Lambda_{24}$  给出, 这是 2022 年菲尔兹奖得主 Viazovska 的工作.

## 1.3 一些格的构造

$\mathbb{Z}^n$  是最简单的格, 其生成元矩阵可取单位矩阵  $I_n$ . 这是一个自对偶的格, 密度为  $\omega_n 2^{-n}$ , 自同构群由所有基的置换与每个基向量的反射组成, 阶为  $2^n n!$ .

设  $P$  为  $\mathbb{R}^{n+1}$  中由方程  $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0$  定义的超平面, 显然  $L$  线性同构于  $\mathbb{R}^n$ , 该线性同构将  $L \cap \mathbb{Z}^{n+1}$  映为  $\mathbb{R}^n$  中的一个格, 这样的格称为  $A_n$ . 显然  $A_1 \cong \mathbb{Z}^1$ , 而  $A_2$  等价于平面上的六边形格,  $A_3$  等价于三维空间中的面心立方格.

$D_n$  定义为  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : x_1 + \cdots + x_n \equiv 0 \pmod{2}\}$ , 容易看出  $D_1 \cong \mathbb{Z}^1$ ,  $D_2 \cong \mathbb{Z}^2$ , 因此  $D$  系列的格一般要求  $n \geq 3$ , 此外可以证明  $D_3 \cong A_3$ .  $D_n$  有生成元矩阵

$$M_n = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

在  $\mathbb{R}^{n+1}$  上定义 Lorentz 双线性型

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1},$$

此时我们将  $\mathbb{R}^{n+1}$  记为  $\mathbb{R}^{n,1}$ , 其中格为整格当且仅当格中任意点  $x$ , 都有  $(x, x) \in \mathbb{Z}$ , 是偶的当且仅当  $(x, x)$  是偶数, 是奇的当且仅当  $(x, x)$  是奇数. 格是幺模的当且仅当其生成元矩阵  $M$  满足  $\det M = 1$ . 可以证明, 对任意  $n$ ,  $\mathbb{R}^{n,1}$  中都存在等价意义下唯一的奇幺模, 记为  $I_{n,1}$ , 而  $\mathbb{R}^{n,1}$  中存在偶幺模当且仅当  $n \equiv 1 \pmod{8}$ , 并且等价意义下也是唯一的, 记为  $II_{n,1}$ , 它们被称为 Lorentz 格.

$I_{n,1}$  可直接取  $\mathbb{Z}^{n+1}$ ,  $II_{n,1}$  则取

$$\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : 2x_i \in \mathbb{Z}, x_1 + \dots + x_n - x_{n+1} \in 2\mathbb{Z}\}.$$

#### 1.4 $E_8$

$E_8$  的定义为

$$E_8 = D_8 \cup \left( D_8 + \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) \right),$$

其名称来自例外李代数  $E_8$ , 可以证明  $E_8$  是偶且幺模的, 即 II 型的.  $E_8$  的一个生成元矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

由  $E_8$  可派生出  $E_7$  和  $E_6$ ,

$$E_7 = \{(x_1, \dots, x_8) \in E_8 : x_7 = x_8\},$$

$$E_6 = \{(x_1, \dots, x_8) \in E_8 : x_6 = x_7 = x_8\},$$

其中将  $\mathbb{R}^8$  中的 7 或 6 维超平面同构为 7 或 6 维线性空间. 如前所说,  $E_7$  和  $E_6$  分别是 7 和 6 维中的最密格点堆积.

现说明  $E_8$  是 8 维最密堆积的证明思路. 证明依赖于以下引理, 这里我们简化为 8 维版本.

**定理 1.** 若存在一个径向施瓦兹函数  $g: \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ , 满足如下条件:

- $|x| \geq \sqrt{2}$  时,  $g(x) \leq 0$ ;
- $\hat{g}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^8$ ;
- $g(0) = \hat{g}(0) = 1$ ,

则 8 维球体堆积密度有上界  $\frac{\pi^4}{384}$ .

对于格点堆积来说该定理是容易证明的, 由泊松求和公式知对任意格  $\Lambda$ , 有

$$\sum_{x \in \Lambda} g(x) = \frac{1}{\sqrt{\det \Lambda}} \sum_{x \in \Lambda^*} \hat{g}(x),$$

不妨设该格中非零向量的最小模大于等于  $\sqrt{2}$  (格缩放不改变密度), 则

$$g(0) \geq \sum_{x \in \Lambda} g(x) = \frac{1}{\sqrt{\det \Lambda}} \sum_{x \in \Lambda^*} \hat{g}(x) \geq \frac{1}{\sqrt{\det \Lambda}} \hat{g}(0),$$

$$\det \Lambda \geq 1.$$

又因球半径不能大于  $\sqrt{2}/2$ , 因此密度

$$\Delta = \frac{\omega_8 r^8}{\sqrt{\det \Lambda}} \leq \frac{\pi^4}{24} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^8 = \frac{\pi^4}{384}.$$

对于一般的未必是格点的堆积, [1] 使用了更细致的逼近方法证明了该定理.

[6] 构造的函数如下:

$$g(x) = \frac{\pi i}{8640} a(x) + \frac{i}{240\pi} b(x),$$

$$a(x) = 4i \sin \left( \frac{\pi |x|^2}{2} \right)^2 \left( \frac{36}{\pi^3(|x|^2 - 2)} - \frac{8640}{\pi^3|x|^4} + \frac{18144}{\pi^3|x|^2} \right)$$

$$+ \int_0^\infty \left( t^2 \phi_0 \left( \frac{i}{t} \right) - \frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} t - \frac{18144}{\pi^2} \right) e^{-\pi |x|^2 t} dt,$$

$$\phi_0(z) = \frac{1728 (E_2(z)E_4(z) - E_6(z))^2}{E_4(z)^3 - E_6(z)^2},$$

$$b(x) = 4i \sin \left( \frac{\pi |x|^2}{2} \right)^2 \left( \frac{144}{\pi |x|^2} + \frac{1}{\pi(|x|^2 - 2)} + \int_0^\infty (\psi_I(it) - 144 - e^{2\pi t}) e^{-\pi |x|^2 t} dt \right),$$

$$\psi_I(z) = 128 \frac{\theta_{00}(z)^4 + \theta_{01}(z)^4}{\theta_{10}(z)^8} + 128 \frac{\theta_{01}(z)^4 - \theta_{10}(z)^4}{\theta_{00}(z)^8},$$

其中诸  $E_{2k}$  是 Eisenstein 级数,  $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}$  是 Jacobi 函数.

而可以计算  $E_8$  格的密度恰好正是  $\frac{\pi^4}{384}$ , 取到上确界, 因此  $E_8$  格就是 8 维中的最密堆积.

几乎完全相同但更复杂的方法可以证明 Leech 格是 24 维中的最密堆积, 见 [2].

## 1.5 Leech 格

Leech 格  $\Lambda_{24}$  最简单的定义是由以下矩阵生成的格, 它也是偶且么模的, 即 II 型的.

$$M = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

接下来我们使用 Lorentz 格构造 Leech 格. 这是 Conway 和 Curtis 发现的神奇方法.

**定理 2.** 方程

$$0^2 + 1^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = n^2$$

的整数解只有  $(m, n) = (0, 0), (1, 1)$  和  $(24, 70)$ .

该定理可由椭圆曲线理论证明.

设向量

$$w = (0, 1, \dots, 24, 70) \in \mathbb{R}^{25,1},$$

由以上定理知该向量有性质  $(w, w) = 0$ , 定义  $w^\perp$  为  $w$  在 Lorentz 双线性型下的正交补, 由于  $w$  与自己正交, 则有  $w \in w^\perp$ . 现取  $w^\perp \cap \Pi_{25,1}$ , 这是一个 25 维格, 设  $(w)$  是由  $w$  生成的 1 维子格, 可以证明商群  $(w^\perp \cap \Pi_{25,1}) / (w)$  正等价于 Leech 格.

Leech 格的自同构群  $\text{Aut}(\Lambda_{24})$  记为  $Co_0$ , 其中心为二元群  $\mathbf{2}$ , 商群  $Co_0/\mathbf{2}$  记为  $Co_1$ ,  $Co_0$  还有两个称为  $Co_2$  和  $Co_3$  的子群, 这四个群统称为 Conway 群, 其中  $Co_1$ ,  $Co_2$  和  $Co_3$  是散在单群. Conway 群也与其他散在单群相关.

## 1.6 格与模形式

任何格都可以定义一个所谓的  $\Theta$  函数,

$$\Theta_\Lambda(\tau) = \sum_{x \in \Lambda} e^{\pi i \tau (x \cdot x)},$$

容易验证该函数在复上半平面全纯. 若格是整格, 习惯设  $q = e^{\pi i \tau}$ , 则  $\Theta_\Lambda(\tau) = \sum_{x \in \Lambda} q^{x \cdot x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ , 其中  $a_n$  为格中模为  $n$  的格点数量. 例如一维格  $\mathbb{Z}$  的  $\Theta$  函数就是最经典的 Jacobi  $\Theta$  函数

$$\Theta_{\mathbb{Z}}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}.$$

由  $n$  维实线性空间上的 Poisson 求和公式知对偶格的  $\Theta$  函数为

$$\Theta_{\Lambda^*}(\tau) = (\det \Lambda)^{1/2} \left( \frac{i}{\tau} \right)^{n/2} \Theta_\Lambda \left( -\frac{1}{\tau} \right),$$

若格  $\Lambda$  是幺模的, 则上式化为

$$\Theta_\Lambda(\tau) = \left( \frac{i}{\tau} \right)^{n/2} \Theta_\Lambda \left( -\frac{1}{\tau} \right),$$

若格  $\Lambda$  还是偶的, 即 II 型的, 则

$$\Theta_\Lambda(\tau + 1) = \sum_{x \in \Lambda} e^{\pi i \tau (x \cdot x)} e^{\pi i \tau (x \cdot x)} = \sum_{x \in \Lambda} e^{\pi i \tau (x \cdot x)} = \Theta_\Lambda(\tau),$$

这说明对于偶幺模格, 其  $\Theta$  函数在分式线性变换

$$\tau \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tau = -\frac{1}{\tau}, \quad \tau \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tau = \tau + 1$$

下不变, 至多差一个自守因子  $(\frac{i}{\tau})^{n/2}$ , 我们进一步要求  $n$  是 8 的倍数, 则第一个变换公式可化为

$$\Theta_{\Lambda}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{n/2}\Theta_{\Lambda}(\tau),$$

又由于模群  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  由  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  生成, 所以我们知道, 8 的倍数维中的偶么模格的  $\Theta$  函数是权为  $n/2$ , 级为  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  的模形式.

按后见之明, 最特殊的维数为 8 和 24 维, 其中偶么模格为  $E_8$  和  $\Lambda_{24}$ , 则  $E_8$  的  $\Theta$  函数是权为 4 的模形式, 由模形式的维数公式或直接验证可知,  $\Theta_{E_8}(\tau) = E_4(\tau)$  为 Eisenstein 级数, 并且

$$\Theta_{\Lambda_{24}}(\tau) = \Theta_{E_8}(\tau)^3 - 720\Delta(\tau),$$

其中  $\Delta(\tau)$  为模判别式. 代入 Eisenstein 级数  $E_4$  和  $E_{12}$  的关系  $E_4(\tau)^3 = E_{12}(\tau) + \frac{432000}{691}\Delta(\tau)$  即可得到 Leech 格中模为  $n$  的格点数公式

$$a_{2k} = \frac{65520}{691}(\sigma_{11}(k) + \tau(k)),$$

$a_{2k+1} = 0$ , 其中  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\sigma_{11}$  是第 11 个除数函数,  $\tau$  是拉马努金函数, 它们分别来自 Eisenstein 级数和模判别式的系数.

## 2 一些代数

本文主要在特征 0 的域  $k$  上工作, 部分内容在特征  $p$  情形或  $k$  只是交换环的情形下也成立.

**定义 4 (代数).** 设  $A$  是  $k$ -向量空间, 并且  $A$  上带有双线性运算  $\cdot$ , 若  $\cdot$  满足结合律, 则称  $A$  是一个代数, 若  $\cdot$  未必结合, 则称  $A$  是一个非结合代数.

**定义 5 (李代数).** 设  $\mathfrak{g}$  是  $k$ -向量空间, 在  $\mathfrak{g}$  上有双线性运算  $[\cdot, \cdot]$ , 满足对任意  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ , 有  $[x, y] = -[y, x]$  和  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ , 则称  $\mathfrak{g}$  是一个李代数.

**定义 6 (Poisson 代数).** 设  $P$  是  $k$ -向量空间, 其上带有两个双线性运算  $\cdot$  和  $\{\cdot, \cdot\}$ ,  $P$  关于  $\cdot$  构成一个结合代数, 关于  $\{\cdot, \cdot\}$  构成一个李代数, 并且满足  $\{x, y \cdot z\} = \{x, y\} \cdot z + y \cdot \{x, z\}$ , 则称  $P$  是一个 Poisson 代数.

若  $M$  是光滑流形,  $C^\infty(M)$  上具有 Poisson 括号使其成为 Poisson 代数, 则称  $M$  是一个 Poisson 流形.

**定义 7** (泛包络代数). 设  $\mathfrak{g}$  是李代数,  $T(\mathfrak{g})$  是其作为向量空间的张量代数, 设  $I$  为所有形如  $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$  的元素生成的理想, 定义  $\mathfrak{g}$  的泛包络代数为  $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I$ , 这是一个兼具结合代数和李代数的结构, 通常将  $x \otimes y$  简记为  $xy$ .

所谓的 PBW 定理断言任何李代数都能嵌入其泛包络代数.

**定义 8** (导子代数). 设  $A$  是非结合  $k$ -代数, 定义

$$\text{Der}_k(A) = \{D \in \text{End}_k(A) \mid D(ab) = D(a)b + aD(b), \forall a, b \in A\},$$

对任意  $D_1, D_2 \in \text{Der}_k(A)$ , 定义括号

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1,$$

其中  $\circ$  表示复合, 则  $(\text{Der}_k(A), [\cdot, \cdot])$  构成李代数, 称为  $A$  的导子代数.

只需验证李括号保持莱布尼兹律, 其余性质都是显然的.

$$\begin{aligned} (D_1 \circ D_2)(ab) &= D_1(D_2(ab)) \\ &= D_1(D_2(a)b + aD_2(b)) \\ &= D_1(D_2(a)b) + D_1(aD_2(b)) \\ &= D_1(D_2(a))b + D_2(a)D_1(b) + D_1(a)D_2(b) + aD_1(D_2(b)) \\ &= (D_1 \circ D_2)(a)b + a(D_1 \circ D_2)(b) + D_2(a)D_1(b) + D_1(a)D_2(b). \end{aligned}$$

同理

$$(D_2 \circ D_1)(ab) = (D_2 \circ D_1)(a)b + a(D_2 \circ D_1)(b) + D_1(a)D_2(b) + D_2(a)D_1(b),$$

相减得到

$$[D_1, D_2](ab) = [D_1, D_2](a)b + a[D_1, D_2](b).$$

**定义 9** (Witt 代数). 设  $k$  是特征 0 的域,  $W$  是  $k$  上的以  $\{L_i : i \in \mathbb{Z}\}$  为基的线性空间, 其中诸  $L_i$  为形式生成元, 即

$$W = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} kL_i,$$

定义二元运算  $[\cdot, \cdot]: W \times W \rightarrow W$ , 在基上满足

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n},$$

其中  $m, n \in \mathbb{Z}$ , 线性延拓到整个  $W$  上使其成为一个李代数, 这样的  $W$  称为 Witt 代数.

容易验证定义中的括号运算确实满足反对称性和雅克比恒等式, 选定域后, 在李代数同构的意义下, Witt 代数是唯一的.

**例 1.** 现给出 Witt 代数的一种构造方法, 以下皆设域  $k$  为复数域  $\mathbb{C}$ . 定义复数域上的洛朗多项式代数为

$$k[z, z^{-1}] = k[z, x]/(zx - 1),$$

即其中元素形如

$$\sum_{n=i}^l a_n z^n, a_n \in k,$$

其中  $i$  和  $l$  可取任何整数. 其导子代数  $\text{Der}(k[z, z^{-1}])$  就是一个 Witt 代数. 具体来说, 由莱布尼兹律和归纳法容易验证对任意  $D \in \text{Der}(k[z, z^{-1}])$ , 都有  $D(z^k) = kz^{k-1}D(z)$  对任意整数  $k$  成立, 由线性性知  $D(f) = \frac{df}{dz}D(z)$  对任意  $f \in k[z, z^{-1}]$  成立, 因此  $D(z)$  完全确定该  $D$ , 故

$$\text{Der}(k[z, z^{-1}]) = \left\{ p(z) \frac{d}{dz} : p(z) \in k[z, z^{-1}] \right\}.$$

选定其基为

$$L_n = -z^{n+1} \frac{d}{dz},$$

对任意  $f \in k[z, z^{-1}]$ , 计算

$$\begin{aligned} (L_m \circ L_n)(f) &= L_m \left( -z^{n+1} \frac{df}{dz} \right) \\ &= -z^{m+1} \frac{d}{dz} \left( -z^{n+1} \frac{df}{dz} \right) \\ &= z^{m+1} \left( (n+1)z^n \frac{df}{dz} + z^{n+1} \frac{d^2 f}{dz^2} \right) \\ &= (n+1)z^{m+n+1} \frac{df}{dz} + z^{m+n+2} \frac{d^2 f}{dz^2}. \end{aligned}$$

同理

$$(L_n \circ L_m)(f) = (m+1)z^{m+n+1} \frac{df}{dz} + z^{m+n+2} \frac{d^2 f}{dz^2},$$

相减得

$$[L_m, L_n] = L_m \circ L_n - L_n \circ L_m = (n-m)z^{m+n+1} \frac{d}{dz} = (m-n)L_{m+n}.$$

**定义 10** (中心扩张). 设  $\mathfrak{g}$  是李代数, 其中心  $Z(\mathfrak{g})$  定义为使得  $[x, \cdot]: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  满足  $\ker([x, \cdot]) = \mathfrak{g}$  的所有  $x$  组成的子代数.

设有李代数的短正合列

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{s} \mathfrak{g} \rightarrow 0,$$

满足  $\ker s \subseteq Z(\mathfrak{h})$ , 则称  $\mathfrak{h}$  是  $\mathfrak{g}$  通过  $\mathfrak{a}$  的中心扩张.

构造中心扩张的最简单方法就是直和一个交换李代数, 若  $\mathfrak{a}$  是一个交换李代数, 则李代数直和  $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}$  就是  $\mathfrak{g}$  通过  $\mathfrak{a}$  的中心扩张, 这种中心扩张称为平凡中心扩张.

接下来考虑 Witt 代数的中心扩张, 设  $kc$  为一维交换李代数, 其基元为  $c$ , 设  $V = W \oplus kc$  是向量空间的直和, 我们希望在  $V$  上定义李括号使其成为非平凡的中心扩张.  $V$  中元素有  $x + fc$  的形式, 其中  $x \in W, f \in k$ . 我们分别以  $[\cdot, \cdot]_V$  和  $[\cdot, \cdot]_W$  记  $V$  和  $W$  中的李括号, 对于  $x, y \in W, [x, y]_V \in V$ , 设其为  $[x, y]_W + f(x, y)c$ , 其中  $f: V \times V \rightarrow k$ , 由于  $V$  是李代数,  $f$  必须满足一些条件, 由反对称性知  $f(x, y) = -f(y, x)$ , 由 Jacobi 恒等式知

$$f(x, [y, z]) + f(y, [z, x]) + f(z, [x, y]) = 0,$$

再加上  $[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n}$ , 可以解得 (具体过程可见视频 An algebra for string theory – The Virasoro algebra.)

$$f(L_m, L_n) = \lambda(m^3 - m)\delta_{m+n,0},$$

其中  $\lambda \in k$  是任意常数,  $\delta_{m+n,0}$  是克罗内克符号.

事实上可以证明 Witt 代数的非平凡中心扩张是唯一的 ([5, Theorem 5.1]), 若  $\lambda = 0$ , 以上构造显然是平凡扩张, 因此以下要求  $\lambda$  非零. 非零常数  $\lambda$  的选取是任意的, 因为若选取  $\lambda'$ , 总是可以通过映射  $c \mapsto (\lambda'/\lambda)c'$  得到李代数同构. 由于一些物理学家的约定, 一般选取  $\lambda = 1/12$ .

**定义 11** (Virasoro 代数). 设  $k$  是特征 0 的域,  $V$  是  $k$  上的以  $\{L_i : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{c\}$  为基的线性空间, 其中诸  $L_i$  和  $c$  为形式生成元, 即

$$V = \left( \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} kL_i \right) \oplus kc,$$

定义二元运算  $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$ , 在基上满足

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{(m^3 - m)c}{12}\delta_{m+n,0},$$

$$[L_n, c] = [c, L_n] = 0,$$

其中  $m, n \in \mathbb{Z}$ , 线性延拓到整个  $V$  上使其成为一个李代数, 这样的  $V$  称为 Virasoro 代数, 其中的  $c$  称为中心元.

### 3 魔群与顶点代数

以下内容没脸见人.

### 3.1 魔群月光

魔群为最大的散在单群, 最早由 Griess 构造, 为一个称为 Griess 代数的 196884 维交换非结合代数的自同构群, 之后 Conway 给出了一个基于编码理论的简化构造, 见 [3] 第 29 章, 两种构造均与 Leech 格相关. 通常以  $\mathbb{M}$  记魔群.

魔群共有 194 个共轭类, 进而有 194 个不可约表示, 它们的维数分别为

$$1, 196883, 21296876, 842609326, 18538750076, 19360062527, \dots$$

该有限数列的 OEIS 号为 A001379.

现考虑著名的  $j$ -不变量的  $q$  级数展开

$$j(q) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + 20245856256q^4 + \dots$$

用  $a_n$  表示 A001379 的第  $n$  个数, 并用  $c_n$  表示  $j$ -不变量的  $q$  级数展开的第  $n$  个系数, 1978 年 McKay 利用惊人的注意力注意到

$$c_2 = a_1 + a_2 = 1 + 196883,$$

进一步, 由 Thompson 注意到

$$c_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$c_4 = 2a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4,$$

$$c_5 = 3a_1 + 3a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5,$$

$$c_6 = 4a_1 + 5a_2 + 3a_3 + 2a_4 + a_5 + a_6 + a_7,$$

由此引出所谓的魔群月光猜想, 应该存在一个某种意义上自然的无限维分次表示  $\rho: \mathbb{M} \rightarrow \mathrm{GL}(V^\natural, V^\natural = \bigoplus_{n=-1}^{\infty} V_n^\natural)$  使得

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \dim(V_n^\natural) q^n = j(q) - 744.$$

之后 Conway 和 Norton 还提出了更精细的刻画.

### 3.2 顶点代数

魔群最知名的性质即魔群月光现象, 其证明用到一种称为顶点代数的构造, 该代数也在某些物理领域中使用, 但据其发明者称, 顶点代数的原始动机与魔群和物理均无关, 而是源于一些关于 Leech 格的性质, 见视频 The Genesis of Vertex Algebras.

设  $R$  是交换环, 定义  $R[[z, z^{-1}]]$  为双边洛朗级数加法群, 其中元素形如

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n,$$

其中  $a_n \in R$ .

**定义 12** (顶点代数). 设  $R$  是一个交换环,  $V$  是  $R$ -模, 并且

- $V$  中有一个标记为  $\mathbb{1}$  的元素,
- 对每个  $a \in V$  和  $n \in \mathbb{Z}$ , 有一个  $a_n \in \text{End}_R(V)$ ,
- 存在线性映射  $T: V \rightarrow V$ ,

以上资料满足以下条件,

- $\mathbb{1}_{-1} = \text{id}_V$ , 而当  $n \neq -1$  时,  $\mathbb{1}_n = 0$
- 对任意  $a \in V$ ,  $a_{(-1)}\mathbb{1} = a$ , 任意  $n \geq 0$ ,  $a_n\mathbb{1} = 0$ ,
- 对任意  $a, b \in V$ , 存在整数  $N$ , 当  $n \geq N$  时,  $a_nb = 0$ ,
- $T(\mathbb{1}) = 0$ , 并且

$$T \circ a_n - a_n \circ T = -na_{n-1},$$

对任意  $a \in V$  和  $n \in \mathbb{Z}$  成立,

- 对任意  $a, b \in V$ ,  $m, l, k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sum_{j \geq 0} \binom{l}{j} ((-1)^j a_{m+l-j} b_{k+j} - (-1)^{j+l} b_{k+l-j} a_{m+j}) = \sum_{n \geq 0} \binom{m}{n} (a_{n+l} b)_{m+k-n},$$

则称  $V$  是一个顶点代数.

对于物理学家来说, 定义中的  $V$  称为态空间,  $\mathbb{1}$  称为真空态或真空向量,  $a_n$  称为场, 我们将不使用这些术语. 线性映射  $T$  称为平移算子, 最后一条公理称为定域公理或局部公理或 Borchers 恒等式, 或顶点代数的 Jacobi 恒等式.

很难想象人是怎么能想出来这么奇怪的定义的, 接下来略微解释.

可以将顶点代数理解为, 带有无穷多种乘积运算的代数, 这些运算由整数标号, 例如  $a$  和  $b$  的乘积记为  $a_nb$ , 显然这与  $a_n \in \text{End}_R(V)$  基本是同一回事. 这些运算未必是交换的, 但是是右结合的, 实际上 Borchers 恒等式就是刻画这些运算的某种交换性. 这些运算之间还存在一些平移关系, 由平移算子  $T$  刻画.

这一大堆定义看起来可能有些乱, 目前通用的定义中使用了双边洛朗级数来将这一族乘法运算绑定起来, 定义  $R$ -线性映射

$$Y(\cdot, z): V \rightarrow \text{End}_R(V)[[z, z^{-1}]],$$

$Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$ , 其中  $a_{(n)} \in \text{End}_R(V)$ , 作用在  $V$  上. 这种记法将会使得公理变得更简洁一些, 但代数层面略失严谨性, 因为迫不得已必须在一大堆各种形式级数空间中工作. 这样的  $Y$  称为顶点算子, 使用顶点算子, 平移公理就写为

$$[T, Y(a, z)] = \partial_z Y(a, z),$$

其中  $[\cdot, \cdot]$  是交换子, Borchers 恒等式则以某种我不知道怎么回事的方式转化成, 对任意  $a, b \in V$ , 存在正整数  $M$  使得

$$(z - w)^M [Y(a, z), Y(b, w)] = 0$$

在  $\text{End}_R(V)[[z, z^{-1}, w, w^{-1}]]$  中成立, 这里的  $Y(\cdot, w)$  疑似是没有定义的, 并且几乎所有顶点代数教材都忽略这一问题, 一个比较严格的叙述是, 指定一个形式变量集, 每个形式变量都有一个顶点算子, 它们之间只有变量不同, 系数完全相同, 可以将这个形式变量集想象成复平面, 而这些顶点算子以某种形式“亚纯”的依赖其形式变量. 最好的理解大概是把这些级数看做形式的记号, 只是将一堆乘法用级数标记, 方便运算而已.

现假设  $R$  是复数域  $\mathbb{C}$ .

**定义 13** (顶点算子代数). 设  $V$  是顶点代数, 并且  $V$  是  $\mathbb{Z}$ -分次模, 即

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n,$$

并且  $1 \in V_0$ , 存在一个标记为  $\omega$  的元素,  $\omega \in V_2$ , 满足

- $\omega_0 = T$ ,
- 对任意整数  $m$  和  $n$ , 有

$$[\omega_{n+1}, \omega_{m+1}] = (m - n)\omega_{m+n+1} + \frac{(m^3 - m)c}{12} \delta_{m+n, 0} \text{id}_V,$$

- $\omega_1$  在  $V$  上的特征值为诸整数  $n \in \mathbb{Z}$ , 并且  $V_n$  就是  $\omega_1$  的对应特征值  $n$  的特征子空间.

定义中的  $\omega$  称为共形向量,  $c$  称为中心荷, 顶点算子代数有时也称为共形顶点代数. 若约定  $L_n = \omega_{n+1}$ , 则顶点算子代数就可以看做带 Virasoro 代数作用的顶点代数.

### 3.2.1 例 1: 交换环

设  $R$  是交换环, 取  $V = R$ ,  $1$  取为  $R$  的单位元  $1$ , 对任意  $a \in V$ , 定义  $a_{-1}$  为左乘  $a$ , 即  $a_{-1}b = ab$ , 而任意正整数  $n \neq -1$ , 定义  $a_n = 0$ , 即  $a_nb = 0$ , 平移算子  $T$  也取零算子  $0$ , 可以验证这样使得交换环成为一个顶点代数.

更有意思的例子是, 假设  $R$  上有导子  $D$ , 取平移算子  $T = D$ , 而对任意  $a \in V$ , 当  $n \geq 0$  时, 定义  $a_nb = 0$ , 当  $n < 0$  时, 定义  $a_nb = \frac{1}{(-n-1)!}D^{-n-1}ab$ , 这样也得到一个顶点代数, 当  $D$  为平凡导子  $0$  时即退化为之前情况.

### 3.2.2 例 2: 可数元多项式代数

设  $\mathbb{C}$ -模  $V = \mathbb{C}[x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}, \dots]$  为可数个形式变元的多项式代数, 变元由负整数编号, 这是一个无穷维向量空间, 基为  $1$  和形如  $x_{n_1} \cdots x_{n_k}$  的单项式, 其中  $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k < 0$ , 我们要求  $1$  为次数  $0$ ,  $x_{-n}$  为次数  $n$ , 而  $x_{n_1} \cdots x_{n_k}$  为次数  $-\sum_{i=1}^k n_i$ , 并令负数次分量为  $0$  维向量空间, 这使得  $\mathbb{C}[x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}, \dots]$  成为一个  $\mathbb{Z}$ -分次向量空间.

取  $1 = 1$  为单位元, 平移运算由  $T(1) = 0$  和  $T(x_{-n}) = nx_{-n-1}$  生成 (满足莱布尼兹律). 以下我们将混淆记号, 用相同的符号表示左乘  $x_{-n}$  算子与元素  $x_{-n}$  本身, 再约定  $x_0$  是左乘  $0$ ,  $x_n$  表示微分算子  $n \frac{\partial}{\partial x_{-n}}$ . 我们使用级数记号法, 定义

$$Y(x_{-1}, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n-1},$$

而

$$Y(x_{-k}, z) = \frac{1}{(k-1)!} \partial_z^{k-1} Y(x_{-1}, z),$$

其他元素的级数以更复杂的形式生成, 可验证这已是顶点代数, 再令共形向量  $\omega = \frac{1}{2}x_{-1}^2$ , 可验证这使得  $V$  成为一个顶点算子代数, 中心荷为  $1$ .

此外, 考虑  $V$  的分次维数, 由构造知  $\dim V_n = p(n)$ , 其中  $p(n)$  是分拆数, 因此分次维数的生成函数就是

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \dim(V_n) q^n = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) q^n,$$

由分拆数的 Euler 定理知右边即为  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{-1}$ , 这与  $\eta$  函数差  $q^{1/24}$  倍, 这玩意疑似在物理中有一些意义, 但我懂也不关心.

### 3.2.3 例 3: 魔群顶点代数

魔群顶点代数也叫月光模, 通常记为  $V^{\natural}$ , 它具有分次结构  $V^{\natural} = \bigoplus_{n=-1}^{\infty} V_n^{\natural}$ , 可以通过将低于  $-1$  次的分量看做  $0$  维向量空间来构成顶点算子代数需要的  $\mathbb{Z}$ -分次结构. 它的自同构群正

好是魔群  $\text{Aut}(V^{\natural}) = \mathbb{M}$ , Griess 代数可以嵌入它的二次分量  $V_2^{\natural}$ , 且满足

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \dim(V_n^{\natural})q^n = j(q) - 744.$$

1988 年, Frenkel, Lepowsky 和 Meurman 构造出了月光模 [4], 其构造与 Leech 格相关, 从 Leech 格的性质中自然产生, 这足以证明魔群月光猜想最简单的版本, 1992 年, Borchers 利用月光模证明了 Conway-Norton 版本的魔群月光猜想.

## 参考文献

- [1] Henry Cohn and Noam Elkies, *New upper bounds on sphere packings i*, Annals of Mathematics **157** (2003), no. 2, 689–714.
- [2] Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danylo Radchenko, and Maryna S. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 24*, Annals of Mathematics **185** (2017), no. 3, 1017–1033.
- [3] John H. Conway and Neil J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, 3 ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 290, Springer, New York, NY, 1999.
- [4] Igor Frenkel, James Lepowsky, and Arne Meurman, *Vertex operator algebras and the monster*, Pure and Applied Mathematics, vol. 134, Academic Press, Boston, 1988. MR0996026
- [5] M. Schottenloher, *A mathematical introduction to conformal field theory*, Lecture Notes in Physics, vol. 759, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [6] Maryna S. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 8*, Annals of Mathematics **185** (2017), no. 3, 991–1015.