

# 盖尔方德对偶

QED

2026 年 6 月 13 日

## 目录

|          |                               |           |
|----------|-------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>简介</b>                     | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>含么盖尔方德对偶</b>               | <b>3</b>  |
| 2.1      | 巴拿赫代数 . . . . .               | 4         |
| 2.2      | 交换巴拿赫代数 . . . . .             | 6         |
| 2.3      | 交换 $C^*$ 代数 . . . . .         | 10        |
| <b>3</b> | <b>无么盖尔方德对偶</b>               | <b>15</b> |
| 3.1      | 单位化 . . . . .                 | 15        |
| 3.2      | 非退化同态, 真映射与单点紧化 . . . . .     | 22        |
| 3.3      | 乘子代数与斯通-切赫紧化 . . . . .        | 26        |
| <b>4</b> | <b>应用</b>                     | <b>29</b> |
| 4.1      | 傅里叶变换 . . . . .               | 29        |
| 4.2      | Wiener 的 Tauber 型定理 . . . . . | 30        |
| <b>5</b> | <b>实情形</b>                    | <b>32</b> |
|          | 附录 A 巴拿赫空间中的解析函数              | <b>32</b> |
|          | 附录 B Banach-Alaoglu 定理        | <b>33</b> |
|          | 附录 C $C^*$ 代数与希尔伯特空间          | <b>33</b> |
|          | 附录 D 群 $C^*$ 代数               | <b>34</b> |

|               |    |
|---------------|----|
| 附录 E $K$ 理论   | 36 |
| E.1 代数 $K$ 理论 | 37 |
| E.2 拓扑 $K$ 理论 | 40 |
| E.3 解析 $K$ 理论 | 43 |
| E.4 历史注记      | 47 |
| 参考文献          | 49 |

## 1 简介

本文标题虽然是盖尔方德对偶, 但内容还包括一些其他内容. 除实情形一节外, 本文默认标量域均为复数域  $\mathbb{C}$ .

**定义 1 (代数).** 设  $R$  是一个非零交换环,  $A$  同时是一个环和一个  $R$ -模, 并且模的加法与环的加法相同, 而  $A$  中乘法与数乘相容, 则称  $A$  是一个  $R$ -代数.

由于作者已习惯环一定含幺, 于是我们这里代数也默认含幺, 而分析学中经常需要考虑未必含幺的代数, 我们称其为无幺代数. 相应的范畴记为  $R\text{-Algebra}$  和  $R\text{-Algbra}$ , 暗示去掉了单位元  $e$ ,  $R\text{-Algebra}$  是  $R\text{-Algbra}$  的子范畴. 注意此处记号不是标准的.

**定义 2 (赋范代数).** 设  $A$  是一个  $\mathbb{C}$ -代数, 若  $A$  作为  $\mathbb{C}$ -线性空间是一个赋范空间, 其中范数记为  $\|\cdot\|: A \rightarrow [0, \infty)$ , 满足  $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$ ,  $\|I\| = 1$ , 其中  $X, Y, I \in A$ ,  $I$  是单位元, 则称  $A$  是一个赋范代数.

**定义 3 (巴拿赫代数).** 完备的赋范代数称为巴拿赫代数.

**定义 4 ( $*$ -代数).** 设  $A$  是一个代数, 带有一个对合映射  $*$ :  $A \rightarrow A$ , 满足  $(X+Y)^* = X^* + Y^*$ ,  $(kX)^* = \bar{k}X^*$ ,  $X^{**} = X$ ,  $(XY)^* = Y^*X^*$ , 其中  $X, Y \in A$ ,  $k \in \mathbb{C}$ , 则称  $A$  是一个  $*$ -代数.

**定义 5 ( $C^*$  代数).** 设  $A$  是一个巴拿赫  $*$ -代数, 并且满足对  $\forall X \in A$ , 都有  $\|X^*X\| = \|X\|^2$ , 则称  $A$  是一个  $C^*$  代数.

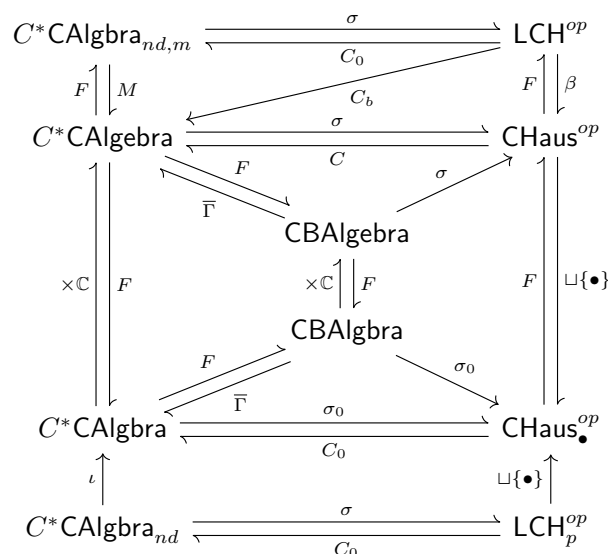
此处  $C$  的含义是闭 (Close) 的首字母, 详细原因将在附录详细说明.

以下是本文中需要用到的范畴列表, 表中一些未定义的术语将在正文中说明.

| 范畴                           | 对象                 | 态射                         |
|------------------------------|--------------------|----------------------------|
| $R\text{-Algebra}$           | $R$ -代数 (含么)       | $R$ -代数同态 (保么)             |
| $R\text{-Algebra}$           | $R$ -代数 (未必含么)     | 无么 $R$ -代数同态               |
| $\text{CBAAlgebra}$          | 交换巴拿赫代数 (含么)       | 有界 $\mathbb{C}$ -代数同态 (保么) |
| $\text{CBAAlgebra}$          | 交换巴拿赫代数 (未必含么)     | 有界无么 $\mathbb{C}$ -代数同态    |
| $C^*\text{CAAlgebra}$        | 交换 $C^*$ 代数 (含么)   | $*$ -同态 (保么)               |
| $C^*\text{CAAlgebra}$        | 交换 $C^*$ 代数 (未必含么) | $*$ -同态                    |
| $C^*\text{CAAlgebra}_{nd}$   | 交换 $C^*$ 代数 (未必含么) | 非退化 $*$ -同态                |
| $C^*\text{CAAlgebra}_{nd,m}$ | 交换 $C^*$ 代数 (未必含么) | 到乘子代数的非退化 $*$ -同态          |
| $\text{CHaus}$               | 紧豪斯多夫空间            | 连续映射                       |
| $\text{CHaus}_\bullet$       | 带基点的紧豪斯多夫空间        | 保基点的连续映射                   |
| $\text{LCH}$                 | 局部紧豪斯多夫空间          | 连续映射                       |
| $\text{LCH}_p$               | 局部紧豪斯多夫空间          | 真连续映射                      |
| $\text{Hil}$                 | 希尔伯特空间             | 有界线性算子                     |

注意本表未标注作为系数环的  $\mathbb{C}$ , 这是因为本文只关心这种情况, 不会引起混淆, 故省略.

总的来说, 本文的目标是说明下图交换. 其中横向的双箭头均为对偶等价, 纵向和斜向的双箭头均为伴随函子.



## 2 含么盖尔方德对偶

本节的目标是说明下图交换.

$$\begin{array}{ccc}
C^*CAgebra & \xrightleftharpoons[\sigma]{\sigma} & CHaus^{op} \\
& \nwarrow F \quad \nearrow C & \\
& CBAgebra &
\end{array}$$

## 2.1 巴拿赫代数

**定理 1.** 设巴拿赫代数  $A$  中元素  $X$  可逆, 若元素  $Y$  满足

$$\|Y\| < \frac{1}{\|X^{-1}\|},$$

则元素  $X - Y$  也可逆, 即距离  $X$  足够近的元素也可逆.

**证明.** 首先假设  $X = I$ , 则  $\|X\| = 1$ ,  $\|Y\| < 1$ , 则  $I - Y$  的逆由级数

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} Y^k$$

给出, 由于  $\|Y\| < 1$ , 该级数部分和为柯西列, 由完备性知级数收敛, 直接计算即知其确实是  $I - Y$  的逆.

接下来考虑一般情形, 将  $X - Y$  写为

$$X - Y = X(I - X^{-1}Y),$$

则

$$\|X^{-1}Y\| \leq \|X^{-1}\| \|Y\| < 1,$$

应用前述结论即得

$$(X - Y)^{-1} = (X(I - X^{-1}Y))^{-1} = (I - X^{-1}Y)^{-1} X^{-1} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} (X^{-1}Y)^k \right) X^{-1},$$

即  $X - Y$  可逆. □

**定义 6** (预解集, 谱集). 对于巴拿赫代数  $A$  中选定的元素  $X$ , 考虑

$$\lambda I - X,$$

其中  $\lambda \in \mathbb{C}$ , 使得  $\lambda I - X$  可逆的  $\lambda$  组成的集合称为  $X$  的预解集, 记为  $\rho(X)$ , 使得  $\lambda I - X$  不可逆的  $\lambda$  组成的集合称为  $X$  的谱集, 记为  $\sigma(X)$ .

当  $\lambda I - X$  可逆时, 通常称  $(\lambda I - X)^{-1}$  为预解式.

**定理 2.**  $\rho(X)$  是  $\mathbb{C}$  中开集.

证明. 假设  $\lambda \in \rho(X)$ , 考虑  $K = \lambda I - X$ ,  $Y = hI$ , 其中  $h \in \mathbb{C}$ , 则  $K$  可逆, 当

$$\|hI\| = |h| < \frac{1}{\|K^{-1}\|}$$

时,  $\lambda I - X - hI = (\lambda - h)I - X$  可逆,  $\lambda - h \in \rho(X)$ , 即  $\lambda$  在  $\rho(X)$  内有开邻域

$$\left\{ \lambda - h : |h| < \frac{1}{\|K^{-1}\|} \right\},$$

从而知  $\rho(X)$  是  $\mathbb{C}$  中开集. □

**定理 3.** 预解式  $R(\lambda) = (\lambda I - X)^{-1}$  是  $\rho(X)$  上的解析函数.

证明. 若  $\lambda, \mu \in \rho(X)$ , 有

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda)I &= (\mu I - X) - (\lambda I - X) \\ &= (\lambda I - X)R(\lambda)(\mu I - X) - (\lambda I - X)R(\mu)(\mu I - X) \\ &= (\lambda I - X)(R(\lambda) - R(\mu))(\mu I - X), \end{aligned}$$

两边同时左乘  $R(\lambda)$  且右乘  $R(\mu)$  可得

$$(\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu) = R(\lambda) - R(\mu),$$

由此可知

$$\frac{R(\mu) - R(\lambda)}{\mu - \lambda} = -R(\lambda)R(\mu),$$

令  $\mu \rightarrow \lambda$  得  $R'(\lambda)$  存在且等于  $-R(\lambda)^2$ , 于是  $R(\lambda)$  在  $\rho(X)$  上解析. □

**定理 4.**  $\sigma(X)$  是  $\mathbb{C}$  中非空闭集.

证明. 由  $\sigma(X) = \mathbb{C} - \rho(X)$  和  $\rho(X)$  开知  $\sigma(X)$  闭. 现假设  $\sigma(X)$  空, 则  $\rho(X) = \mathbb{C}$ , 即  $R(\lambda)$  是整函数, 当  $\lambda \rightarrow \infty$  时, 由于  $(I - \lambda^{-1}X)^{-1} \rightarrow I$ , 故

$$\|R(\lambda)\| = \left\| \lambda (I - \lambda^{-1}X)^{-1} \right\| = |\lambda|^{-1} \left\| (I - \lambda^{-1}X)^{-1} \right\| \rightarrow 0,$$

任取线性泛函  $l$ , 由刘维尔定理知  $l(R(\lambda)) = 0$ , 进而  $R(\lambda) = 0$ , 这是不可能的. □

关于巴拿赫空间中的解析函数, 见附录.

**定义 7** (谱半径).  $X$  的谱半径定义为

$$r(X) = \max_{\lambda \in \sigma(X)} |\lambda|.$$

注意, 也有人使用  $\rho(X)$  表示谱半径, 这是一个非常容易混淆的符号.

**定理 5** (盖尔方德谱半径公式).

$$r(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|X^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

证明见 [7] 定理 1.8 或 [11] 第 17 章定理 4.

**定理 6** (盖尔方德-马祖尔定理). 若  $A$  是一个可除巴拿赫代数, 即所有非零元均可逆, 则  $A \cong \mathbb{C}$ .

证明. 假设  $X \in A$  且  $X \neq kI$ , 其中  $k \in \mathbb{C}$ , 则对任意  $\lambda \in \mathbb{C}$  均有  $\lambda I - X \neq 0$ , 从而对所有  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda I - X$  皆可逆, 于是  $\sigma(X) = \emptyset$ , 这是不可能的, 故存在  $k \in \mathbb{C}$  使得  $X = kI$ , 映射  $kI \rightarrow k$  即为同构  $A \cong \mathbb{C}$ .  $\square$

## 2.2 交换巴拿赫代数

**定义 8** (谱). 设  $A$  是一个含么或无么的交换巴拿赫代数, 定义其谱  $\sigma(A)$  为从  $A$  到  $\mathbb{C}$  的所有非零同态组成的集合, 约定  $\sigma_0(A) = \sigma(A) \sqcup \{0\}$ , 即添加零同态.

**引理 1.** 设  $A$  是一个交换巴拿赫代数,  $f \in \sigma(A)$ ,  $I$  是  $A$  的单位元, 则  $f(I) = 1$ , 若  $X$  是  $A$  中可逆元, 则  $f(X) \neq 0$ .

证明. 对  $\forall Y \in A$ , 由  $f(Y) = f(YI) = f(Y)f(I)$  和  $f \neq 0$  得  $f(I) = 1$ . 由  $1 = f(I) = f(X)f(X^{-1})$  即得  $f(X) \neq 0$ .  $\square$

**定理 7.** 设  $A$  是一个交换巴拿赫代数,  $f \in \sigma(A)$ , 则对  $\forall X \in A$ , 有

$$|f(X)| \leq \|X\|.$$

证明. 假设存在  $X \in A$  使得  $|f(X)| > \|X\|$ , 令  $Y = \frac{X}{f(X)}$ , 则  $|Y| < 1$ , 于是知  $I - Y$  可逆, 而又有

$$f(I - Y) = f(I) - f\left(\frac{X}{f(X)}\right) = 1 - 1 = 0,$$

这是不可能的, 因此定理成立.  $\square$

**定理 8.** 设  $A$  是一个交换巴拿赫代数,  $\sigma(A)$  作为  $A^*$  的子集, 在弱\* 拓扑下是紧豪斯多夫空间.

证明. 由上一定理知  $f \in \sigma(A)$  的算子范数  $\|f\| \leq 1$ , 即  $\sigma(A)$  是  $A^*$  中单位闭球的子集, 在弱\* 拓扑下,  $\sigma(A)$  是单位闭球的闭子集, 由 Banach-Alaoglu 定理 (见附录) 知  $\sigma(A)$  是紧豪斯多夫的.  $\square$

**定理 9.** 定义

$$\sigma: \text{CBAgebra} \rightarrow \text{CHaus}^{op},$$

对象层面,  $\forall A \in \text{Ob}(\text{CBAgebra}), A \mapsto \sigma(A)$ , 态射层面,  $\forall f \in \text{Hom}_{\text{CBAgebra}}(A, B)$ ,

$$\sigma(f): \sigma(B) \rightarrow \sigma(A)$$

$$\varphi \mapsto \varphi \circ f,$$

则上述定义的  $\sigma$  确实是函子.

证明. 对象层面由上一定理保证, 态射层面, 由于含么代数同态一定保么, 故非零, 而非零同态的复合仍是非零同态, 所以  $\sigma(f)$  是良定的, 接下来证明它是连续的.  $\sigma(A)$  上的弱\* 拓扑由以下形式的子基生成,

$$U(a, V) = \{\varphi \in \sigma(A) : \varphi(a) \in V\},$$

其中  $a \in A$ ,  $V$  是  $\mathbb{C}$  中的开集, 它在  $\sigma(f)$  下的原像为

$$\sigma(f)^{-1}(U(a, V)) = \{\varphi \in \sigma(B) : (\varphi \circ f)(a) \in V\} = \{\varphi \in \sigma(B) : \varphi(f(a)) \in V\},$$

右侧恰好是  $\sigma(B)$  中子基  $U(f(a), V)$ , 在  $\sigma(B)$  中是开集, 因此  $\sigma(f)$  是连续映射.

由范畴论可知拉回映射的函子性, 因此  $\sigma$  确实是函子. □

**引理 2.** 设  $A$  是一个交换巴拿赫代数,  $\mathfrak{J}$  是  $A$  的真理想, 则其闭包  $\overline{\mathfrak{J}}$  也是  $A$  的真理想.

证明. 设  $k \in \mathbb{C}$ ,  $X, Y \in \overline{\mathfrak{J}}$ ,  $X_n \rightarrow X$ ,  $Y_n \rightarrow Y$ ,  $X_n, Y_n \in \mathfrak{J}$ , 则

$$X + Y = \lim_{n \rightarrow \infty} (X_n + Y_n) \in \overline{\mathfrak{J}},$$

$$kX = \lim_{n \rightarrow \infty} kX_n \in \overline{\mathfrak{J}},$$

于是  $\overline{\mathfrak{J}}$  是理想. 由于单位元  $I$  附近存在一个开球使得其中元素均可逆, 而  $\mathfrak{J}$  内无可逆元, 则其闭包  $\overline{\mathfrak{J}}$  一定不包含  $I$ , 从而是真理想. □

**引理 3.** 交换巴拿赫代数的极大理想一定是闭的.

证明. 若不然, 其闭包也是真理想, 这与极大性矛盾. □

**定理 10.** 交换巴拿赫代数  $A$  中元素  $X$  可逆当且仅当对任意  $f \in \sigma(A)$ , 都有  $f(X) \neq 0$ .

证明. 只需证明若  $X$  不可逆, 则存在  $f \in \sigma(A)$  使得  $f(X) = 0$ , 由  $X$  不可逆知存在  $A$  的极大理想  $\mathfrak{m}$  包含  $X$ , 由极大性知  $A/\mathfrak{m}$  是域, 由盖尔方德-马祖尔定理知其同构于  $\mathbb{C}$ , 于是商映射  $\pi: A \rightarrow A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$  即满足  $\pi(X) = 0$ . □

**定理 11.** 设  $X$  是交换巴拿赫代数中元素, 则其谱为

$$\sigma(X) = \{f(X) : f \in \sigma(A)\}.$$

证明. 由谱集的定义知, 复数  $\lambda \in \sigma(X)$  当且仅当  $\lambda I - X$  可逆, 这又等价于存在  $f \in \sigma(A)$  使得  $f(\lambda I - X) = 0$ , 等价于  $f(X) = \lambda$ .  $\square$

**定义 9 (极大谱).** 交换巴拿赫代数  $A$  的所有极大理想组成的集合称为其极大谱, 记为  $\text{Max}(A)$ .

**定理 12.** 对任意交换巴拿赫代数  $A$ ,  $\sigma(A)$  与  $\text{Max}(A)$  之间有一个一一对应.

证明. 做映射

$$\sigma(A) \rightarrow \text{Max}(A)$$

$$f \mapsto \ker f,$$

由于非零同态一定是满射, 则有  $A/\ker f \cong \mathbb{C}$ , 于是  $\ker f$  是  $A$  的一个极大理想. 若  $g \in \sigma(A)$ ,  $\ker f = \ker g$ , 则对  $\forall X \in A$ , 它可以表示为  $X = f(X)I + Y$ , 其中  $Y \in \ker f$ , 则  $g(X) = f(X)g(I) + g(Y) = f(X)$ , 由  $X$  任意性知  $f = g$ , 即  $f \mapsto \ker f$  是单射, 接下来说明它是满射.

对  $\mathfrak{m} \in \text{Max}(A)$ , 如前所述,  $\pi: A \rightarrow A/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$  即为  $\sigma(A)$  中元素, 于是  $f \mapsto \ker f$  是满射, 进而是双射.  $\square$

**定理 13.** 定义

$$C: \text{CHaus} \rightarrow C^*\text{Algebra}^{op},$$

对象层面,  $\forall K \in \text{Ob}(\text{CHaus})$ ,  $C(K)$  为  $K$  到  $\mathbb{C}$  的所有连续函数组成的集合, 态射层面,  $\forall \varphi \in \text{Hom}_{\text{CHaus}}(K, L)$ ,

$$C(\varphi): C(L) \rightarrow C(K)$$

$$f \mapsto f \circ \varphi,$$

则以上定义的  $C$  确实是一个函子.

证明. 由  $\mathbb{C}$  中加法和乘法的连续性可知  $C(K)$  是  $\mathbb{C}$ -代数, 映到 1 的常值映射为  $C(K)$  中单位元. 在  $C(K)$  上定义范数为一致范数

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

由  $K$  紧知该范数有意义, 由基础泛函分析知它使得  $C(K)$  成为一个巴拿赫代数, 再定义对合为复共轭  $f^*(x) = \overline{f(x)}$ , 由范数的定义得

$$\|f^* f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f^*(x)f(x)| = \sup_{x \in K} |\overline{f(x)}f(x)| = \sup_{x \in K} |f(x)|^2 = \|f\|_\infty^2,$$



于是  $C(K)$  成为一个  $C^*$  代数.

态射层面,  $C(\varphi)$  显然是良定的, 接下来证明它是一个  $C^*$  代数同态. 映射的复合显然与加法, 乘法和数乘可交换, 并且

$$C(\varphi)(f^*) = \overline{f} \circ \varphi = \overline{f \circ \varphi} = (C(\varphi)(f))^*,$$

即  $C(\varphi)$  保持对合,

$$\|C(\varphi)(f)\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(\varphi(x))| \leq \sup_{y \in L} |f(y)| = \|f\|_\infty,$$

推出  $C(\varphi)$  是有界的, 于是知  $C(\varphi)$  确实是  $C^*$  代数同态. 由拉回映射函子性知  $C$  确实是函子.  $\square$

**定义 10** (盖尔方德变换). 设  $X$  是交换巴拿赫代数  $A$  中元素, 定义

$$\begin{aligned} \widehat{X}: \sigma(A) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(X), \end{aligned}$$

它显然是  $\sigma(A)$  上的连续函数, 即  $C(\sigma(A))$  中元素, 则映射

$$\begin{aligned} \Gamma_A: A &\rightarrow C(\sigma(A)) \\ X &\mapsto \widehat{X} \end{aligned}$$

称为盖尔方德变换.

在不引发混淆的情况, 可省略  $\Gamma_A$  的下标.

**定理 14.** 设  $X$  是交换巴拿赫代数  $A$  中元素, 则以下成立:

- 1, 盖尔方德变换是从  $A$  到  $C(\sigma(A))$  的  $\mathbb{C}$ -代数同态;
- 2,  $X$  可逆当且仅当  $\widehat{X}$  的值域不含 0;
- 3,  $\widehat{X}$  的值域即为  $\sigma(X)$ ;
- 4,  $\|\widehat{X}\|_\infty = r(X) \leq \|X\|$ .

证明. 1,  $(\widehat{XY})(f) = f(XY) = f(X)f(Y) = \widehat{X}(f)f(Y)$ , 加法和数乘同理, 而由  $f(I) = 1$  知  $\widehat{I}(f) \equiv 1$ , 因此是同态.

- 2,  $X$  可逆当且仅当对任意  $f \in \sigma(A)$ , 都有  $f(X) \neq 0$ , 即  $\widehat{X}(f) \neq 0$ .
- 3, 由  $\sigma(X) = \{f(X) : f \in \sigma(A)\} = \{\widehat{X}(f) : f \in \sigma(A)\}$  即得.
- 4, 由谱半径的定义即得.  $\square$

**定义 11.** 定义函子  $\bar{\Gamma}: \text{CBA}lgebra \rightarrow C^*CAlgebra$  为函子  $\sigma$  与  $C$  的复合.

我们可以将  $\bar{\Gamma}$  看做交换巴拿赫代数的  $C^*$  化, 我们将证明它是遗忘函子的左伴随.

**定理 15.**  $\Gamma$  是从  $\text{id}_{\text{CBA}lgebra}$  到  $\bar{\Gamma}$  的自然变换.

证明. 也就是要证明对任意交换巴拿赫代数  $A$  和  $B$ , 下图交换.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Gamma_A} & \bar{\Gamma}(A) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \bar{\Gamma}(\psi) \\ B & \xrightarrow{\Gamma_B} & \bar{\Gamma}(B) \end{array}$$

注意  $\bar{\Gamma}$  就是  $C \circ \sigma$ , 任取  $a \in A$ ,  $\Gamma_B(\psi(a)) = \widehat{\psi(a)}$ ,

$$C(\sigma(\psi))(\Gamma_A(a)) = \widehat{a} \circ \sigma(\psi),$$

而对于任意的  $g \in \sigma(B)$ , 有

$$\widehat{\psi(a)}(g) = g(\psi(a)),$$

$$\widehat{a} \circ \sigma(\psi)(g) = \widehat{a}(g \circ \psi) = g(\psi(a)),$$

因此  $\Gamma_B(\psi(a)) = C(\sigma(\psi))(\Gamma_A(a))$ , 即该图交换.  $\square$

### 2.3 交换 $C^*$ 代数

**定理 16.** 设  $X$  是一个紧豪斯多夫空间, 对任意  $x \in X$ , 定义  $h_x: C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h_x(f) = f(x)$ , 则  $H: x \mapsto h_x$  是  $X$  到  $\sigma(C(X))$  的同胚.

证明. 显然映射  $h_x$  是一个非零同态, 即  $h_x \in \sigma(C(X))$ . 现假设  $h_x = h_y$ , 则对  $X$  上任意连续函数  $f$ , 都有  $f(x) = f(y)$ , 而紧豪斯多夫空间一定是正规空间, 由乌雷松引理知若  $x \neq y$ , 则一定存在连续函数分离这两点, 因此必有  $x = y$ , 故  $H$  是单射.

接下来证明该映射是连续的, 假设任意网  $x_\alpha \rightarrow x$ , 由  $f$  的连续性知  $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ , 即  $h_{x_\alpha}(f) \rightarrow h_x(f)$  对任意  $f$  都成立, 则在弱\* 拓扑下,  $h_{x_\alpha} \rightarrow h_x$ , 因此  $H$  是连续的.

由于  $H$  是紧豪斯多夫空间之间的连续单射, 只需说明它是满射就能得到它是同胚, 即  $C(X)$  到  $\mathbb{C}$  的每个非零同态都形如  $h_x$ , 这等价于说  $C(X)$  的每个极大理想都形如

$$\ker h_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}.$$

假设  $\mathfrak{m}$  是  $C(X)$  中的任一极大理想, 并设  $V(\mathfrak{m})$  是  $\mathfrak{m}$  中函数的公共零点集, 即

$$V(\mathfrak{m}) = \{x \in X \mid f(x) = 0, \forall f \in \mathfrak{m}\},$$

假设  $V$  是空的, 那么对于每个点  $x \in X$ , 由于它不是公共零点, 则必然存在着函数  $f_x \in \mathfrak{m}$  使得  $f_x(x) \neq 0$ , 则集合  $U_x = \{y \in X : f_x(y) \neq 0\} = f_x^{-1}(\mathbb{C} - \{0\})$  是  $x$  的开邻域, 所有这样的  $U_x$  组成  $X$  的一个开覆盖, 由  $X$  紧知其存在有限子覆盖, 不妨设为  $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ , 对应的函数为  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ , 它们当然是没有公共零点的, 令

$$g = f_{x_1} \overline{f_{x_1}} + \dots + f_{x_n} \overline{f_{x_n}} = |f_{x_1}|^2 + \dots + |f_{x_n}|^2,$$

显然  $g$  连续且  $g \in \mathfrak{m}$ , 而且在  $X$  上处处有  $g > 0$ , 故  $g$  是  $C(X)$  中的可逆元, 这与  $\mathfrak{m}$  是极大理想矛盾, 因此  $V(\mathfrak{m})$  非空, 设  $v \in V(\mathfrak{m})$ , 则  $\mathfrak{m} \subseteq \ker h_v$ , 由极大性知  $\mathfrak{m} = \ker h_v$ . 于是  $H$  是满的, 进而是同胚.  $\square$

**定理 17** (斯通-魏尔斯特拉斯定理). 设  $K$  是一个紧豪斯多夫空间,  $A$  是  $C(K)$  的一个子代数, 如果  $A$  满足以下条件:

- 对  $K$  中任意两个不同的点  $x \neq y$ , 存在  $f \in A$  使得  $f(x) \neq f(y)$ ;
- 对任意  $x \in K$  都存在  $f \in A$  使得  $f(x) \neq 0$ ;
- 对任意的  $f \in A$ , 其复共轭函数  $\bar{f} \in A$ ,

则  $A$  在  $C(K)$  中是稠密的.

该经典定理的证明见 [16] 定理 7.33.

**定理 18.** 若  $A$  是一个交换  $C^*$  代数, 则  $\Gamma_A(A)$  在  $C(\sigma(A))$  中稠密.

证明. 第一步, 我们证明在  $A$  中, 若  $X = X^*$ , 则  $\widehat{X}$  是实值函数. 设  $h \in \sigma(A)$ ,  $\widehat{X}(h) = h(X) = \alpha + i\beta$ , 其中  $\alpha$  和  $\beta$  为实数. 对任意实数  $t \in \mathbb{R}$ , 构造元素

$$Z = X + itI,$$

则有

$$h(Z) = h(X) + ith(I) = \alpha + i\beta + it = \alpha + i(\beta + t),$$

$$Z^*Z = X^2 + t^2I,$$

由性质  $|h(Z)| \leq \|Z\|$  以及  $\|Z\|^2 = \|Z^*Z\|$  得

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |h(Z)|^2 \leq \|Z\|^2 = \|Z^*Z\| = \|X^2 + t^2I\| \leq \|X^2\| + t^2,$$

展开左边得

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t + t^2 \leq \|X^2\| + t^2,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|X^2\|,$$

由于右边  $\|X^2\|$  是一个有限数, 不等式要对任意的实数  $t$  成立, 必须满足  $\beta = 0$ , 这就证明了每当  $X = X^*$  时,  $\widehat{X}(h) = \alpha$  必为实数.

第二步, 我们证明对任意  $X \in A$ , 都有  $\widehat{X^*} = \overline{\widehat{X}}$ . 设

$$U = \frac{X + X^*}{2}, \quad V = \frac{X - X^*}{2i},$$

显然  $U = U^*$  且  $V = V^*$ , 而  $X$  和  $X^*$  可以表示为

$$X = U + iV, \quad X^* = U - iV,$$

根据第一步的可知  $\widehat{U}$  和  $\widehat{V}$  都是实值函数, 则

$$\widehat{X} = \widehat{U} + i\widehat{V} \quad \widehat{X^*} = \widehat{U} - i\widehat{V}, \quad \widehat{X^*} = \overline{\widehat{X}}.$$

第三步, 完成证明. 对  $C(\sigma(A))$  中任意两个不同的函数  $f$  和  $g$ , 一定存在  $X \in A$  使得  $f(X) \neq g(X)$ , 从而  $\widehat{X}(f) \neq \widehat{X}(g)$ , 单位函数  $\widehat{I}$  满足对任意  $f \in C(\sigma(A))$ , 都有  $\widehat{I}(f) = 1 \neq 0$ , 由第二步知, 对任意的  $\widehat{X} \in \Gamma_A(A)$ , 其共轭即为  $\overline{\widehat{X}} = \widehat{X^*} \in \Gamma_A(A)$ , 由斯通-魏尔斯特拉斯定理知,  $\Gamma_A(A)$  在  $C(\sigma(A))$  中稠密.  $\square$

**定理 19.** 设  $A$  是一个交换的巴拿赫代数, 若  $X \in A$ , 则  $\|\widehat{X}\|_\infty = \|X\|$  当且仅当对所有  $k \geq 1$ , 都有  $\|X^{2^k}\| = \|X\|^{2^k}$ .  $\Gamma$  是一个等距同构当且仅当对所有  $X \in A$ , 都有  $\|X^2\| = \|X\|^2$ .

证明. 若  $\|\widehat{X}\|_\infty = \|X\|$ , 则

$$\|X^{2^k}\| \leq \|X\|^{2^k} = \|\widehat{X}\|_\infty^{2^k} = \|\widehat{X^{2^k}}\|_\infty \leq \|X^{2^k}\|,$$

所以  $\|X^{2^k}\| = \|X\|^{2^k}$ . 反过来, 如果对所有的  $k$ , 都有  $\|X^{2^k}\| = \|X\|^{2^k}$ , 则由谱半径公式知

$$\|\widehat{X}\|_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \|X^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|X\|.$$

显然  $\Gamma$  是等距同构推出  $\|X^2\| = \|X\|^2$ , 反之, 若  $\|X^2\| = \|X\|^2$ , 由归纳法立刻得到  $\|X^{2^k}\| = \|X\|^{2^k}$ , 进而  $\|\widehat{X}\|_\infty = \|X\|$ , 于是  $\Gamma$  是等距同构.  $\square$

**定理 20** (盖尔范德-奈马克定理). 若  $A$  是一个交换  $C^*$  代数, 则  $\Gamma$  是从  $A$  到  $C(\sigma(A))$  的等距  $*$ -同构.

证明. 设  $X \in A$ , 令  $Y = X^*X$ , 则  $Y = Y^*$ , 因此有

$$\|Y^{2^k}\| = \left\| \left( Y^{2^{k-1}} \right)^* Y^{2^{k-1}} \right\| = \left\| Y^{2^{k-1}} \right\|^2,$$

故  $\|Y^{2^k}\| = \|Y^{2^{k-1}}\|^2 = \|Y^{2^{k-2}}\|^4 = \dots = \|Y\|^{2^k}$ , 由上一定理得  $\|\widehat{Y}\|_\infty = \|Y\|$ , 进而有

$$\|X\|^2 = \|X^*X\| = \|Y\| = \|\widehat{Y}\|_\infty = \|\widehat{X^*X}\|_\infty = \|\widehat{X^*}\widehat{X}\|_\infty = \|\widehat{X}\widehat{X}\|_\infty = \|\widehat{X}\widehat{X}\|_\infty = \left\| \widehat{X}^2 \right\|_\infty = \|\widehat{X}\|_\infty^2,$$

因此  $\Gamma$  是等距. 而等距一定是单射, 且值域闭, 又因  $\Gamma_A(A)$  在  $C(\sigma(A))$  中稠密, 则  $\Gamma_A(A) = C(\sigma(A))$ , 而  $\Gamma$  保对合在证明稠密性的第二步中已经证明了, 综上,  $\Gamma$  确实是一个等距  $*$ -同构.  $\square$

**定理 21** (盖尔方德对偶). 函子  $\sigma$  是  $C^*\text{CAIgebra}$  与  $\text{CHaus}$  之间的对偶等价, 其拟逆函子即为  $C$ .

证明. 对象层面, 现已证明  $X \cong \sigma(C(X))$  和  $A \cong C(\sigma(A))$ , 而在态射层面, 我们需要说明以下两个图交换.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H_X} & \sigma(C(X)) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \sigma(C(\varphi)) \\ Y & \xrightarrow{H_Y} & \sigma(C(Y)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Gamma_A} & C(\sigma(A)) \\ \downarrow \psi & & \downarrow C(\sigma(\psi)) \\ B & \xrightarrow{\Gamma_B} & C(\sigma(B)) \end{array}$$

任取  $x \in X$ ,  $H_Y(\varphi(x)) = h_{\varphi(x)}$ ,

$$\sigma(C(\varphi))(H_X(x)) = \sigma(C(\varphi))(h_x) = h_x \circ C(\varphi),$$

而对于任意的  $f \in C(Y)$ , 有

$$h_{\varphi(x)}(f) = f(\varphi(x)),$$

$$h_x \circ C(\varphi)(f) = h_x(f \circ \varphi) = f(\varphi(x)),$$

因此  $H_Y(\varphi(x)) = \sigma(C(\varphi))(H_X(x))$ , 即左图交换.

至于右图, 先前已经证明过  $\Gamma$  的在范畴  $\text{CBAIgebra}$  中的自然性, 限制到范畴  $C^*\text{CAIgebra}$  上即知右图交换. 于是我们证明了自然同构  $\sigma \circ C \cong \text{id}_{\text{CHaus}}$  和  $C \circ \sigma \cong \text{id}_{C^*\text{CAIgebra}}$ , 即两范畴对偶等价.  $\square$

最后, 我们完成本节目标交换图的最后一部分.

此前提到的  $C^*$  化有以下泛性质.

**定理 22.** 设  $A$  是一个交换巴拿赫代数, 对任意交换  $C^*$  代数  $B$  和有界同态  $\varphi: A \rightarrow B$ , 都存在唯一的  $C^*$  代数同态  $\bar{\varphi}: \bar{\Gamma}(A) \rightarrow B$  使得下图交换.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Gamma_A} & \bar{\Gamma}(A) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \bar{\varphi} \\ & & B \end{array}$$

证明. 先证存在性, 构造  $\bar{\varphi} = \Gamma_B^{-1} \circ \bar{\Gamma}(\varphi)$ , 已知  $\Gamma_B$  是  $B$  到  $\bar{\Gamma}(B)$  的等距  $*$ -同构, 其逆  $\Gamma_B^{-1}$  存在且亦是等距  $*$ -同构, 于是  $\bar{\varphi}$  确实是  $C^*$  代数同态, 并且满足  $\varphi = \bar{\varphi} \circ \Gamma_A$ .

再证唯一性, 假设还有另一  $C^*$  代数同态  $\psi$  满足条件, 则  $\bar{\varphi}$  和  $\psi$  在  $\Gamma_A(A)$  上相等, 由于它们还保持对合, 故在  $\Gamma_A(A)^* = \{\alpha^* : \alpha \in \Gamma_A(A)\}$  上也相等. 由斯通-魏尔斯特拉斯定理可知,  $\Gamma_A(A) \cup \Gamma_A(A)^*$  生成的  $*$ -代数在  $\bar{\Gamma}(A)$  中稠密, 由稠密延拓的唯一性可知, 一定有  $\bar{\varphi} = \psi$ .  $\square$

**定理 23.** 设  $F: C^*\text{CAlgebra} \rightarrow \text{CBAAlgebra}$  是遗忘函子, 则  $\bar{\Gamma} \dashv F$ .

证明. 固定交换巴拿赫代数  $A$  和交换  $C^*$  代数  $B$ , 我们构造映射

$$\begin{aligned} \Phi: \text{Hom}_{C^*\text{CAlgebra}}(\bar{\Gamma}(A), B) &\rightarrow \text{Hom}_{\text{CBAAlgebra}}(A, F(B)) \\ f &\mapsto f \circ \Gamma_A, \end{aligned}$$

其中我们把  $B$  与  $F(B)$  看做等同, 由于  $\Gamma_A$  是代数同态,  $f \circ \Gamma_A$  是有界代数同态, 故  $\Phi$  良定. 再构造映射

$$\begin{aligned} \Psi: \text{Hom}_{\text{CBAAlgebra}}(A, F(B)) &\rightarrow \text{Hom}_{C^*\text{CAlgebra}}(\bar{\Gamma}(A), B) \\ g &\mapsto \Gamma_B^{-1} \circ \bar{\Gamma}(g), \end{aligned}$$

其中我们依然把  $B$  与  $F(B)$  看做等同, 已知  $\Gamma_B$  是  $B$  到  $\bar{\Gamma}(B)$  的等距  $*$ -同构, 其逆  $\Gamma_B^{-1}$  存在且亦是等距  $*$ -同构, 于是  $\Gamma_B^{-1} \circ \bar{\Gamma}(g)$  确实是  $C^*$  代数同态,  $\Psi$  也良定.

对任意  $g \in \text{Hom}_{\text{CBAAlgebra}}(A, F(B))$ , 根据盖尔方德变换  $\Gamma$  作为自然变换的性质, 对于代数同态  $g: A \rightarrow B$ , 下图交换.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Gamma_A} & \bar{\Gamma}(A) \\ g \downarrow & & \downarrow \bar{\Gamma}(g) \\ B & \xrightarrow{\Gamma_B} & \bar{\Gamma}(B) \end{array}$$

于是我们有

$$\Phi(\Psi(g)) = \Gamma_B^{-1} \circ \bar{\Gamma}(g) \circ \Gamma_A = \Gamma_B^{-1} \circ \Gamma_B \circ g = g,$$

这说明  $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{\text{Hom}_{\text{CBAAlgebra}}(A, F(B))}$ .

另一方面, 对任意  $f \in \text{Hom}_{C^*\text{CAlgebra}}(\bar{\Gamma}(A), B)$ , 考虑  $\Psi(\Phi(f))$ , 令  $g = \Phi(f) = f \circ \Gamma_A$ . 由  $\bar{\Gamma}(A)$  的泛性质可知, 对有界代数同态  $g$ , 存在唯一的  $C^*$  代数同态  $\bar{g} = \Gamma_B^{-1} \circ \bar{\Gamma}(g)$  使得  $g = \bar{g} \circ \Gamma_A$ , 而  $f$  也满足相同的性质, 故必有  $\Psi(\Phi(f)) = \Gamma_B^{-1} \circ \bar{\Gamma}(g) = f$ .

最后,  $\Phi$  对第一个变量的自然性由盖尔方德变换的自然性推出, 对第二个变量的自然性直接由映射复合的结合律得到, 因此  $\Phi$  确实是一个自然双射, 故伴随性  $\bar{\Gamma} \dashv F$  得证.  $\square$

综上, 我们证明了下图交换, 其中  $\sigma$  和  $C$  是对偶等价,  $F$  和  $\bar{\Gamma}$  是伴随对.

$$\begin{array}{ccc}
C^*CAgebra & \xrightleftharpoons[\sigma]{\sigma} & CHaus^{op} \\
& \nwarrow F \quad \nearrow \sigma & \\
& CBAgebra &
\end{array}$$

### 3 无么盖尔方德对偶

#### 3.1 单位化

本节的目的是说明下图交换.

$$\begin{array}{ccccc}
C^*CAgebra & \xrightleftharpoons[\sigma]{\sigma} & CHaus^{op} & & \\
\uparrow \times \mathbb{C} & \nwarrow F & \nearrow \sigma & & \uparrow \\
& CBAgebra & & & \\
\downarrow F & \nwarrow \bar{F} & \nearrow \sigma_0 & & \downarrow F \sqcup \{\bullet\} \\
& CBAgebra & & & \\
\downarrow \times \mathbb{C} & \nwarrow F & \nearrow \sigma_0 & & \downarrow \\
C^*CAgebra & \xrightleftharpoons[\sigma_0]{\sigma_0} & CHaus_{\bullet}^{op} & &
\end{array}$$

设  $A$  是一个无么交换巴拿赫代数, 我们定义  $\tilde{A} = A \times \mathbb{C}$ , 它显然是一个  $\mathbb{C}$ -向量空间, 在其上定义乘法

$$(X, a)(Y, b) = (XY + bX + aY, ab),$$

容易验证这使得  $\tilde{A}$  成为一个交换  $\mathbb{C}$ -代数,  $(0, 1)$  是么元. 再在其上定义范数

$$\|(X, a)\| = \|X\| + |a|,$$

可以验证这确实是范数, 并且使  $\tilde{A}$  成为一个交换巴拿赫代数.

在  $\tilde{A}$  中, 有自然的嵌入  $\iota: A \rightarrow \tilde{A}$ ,  $\iota(A) = A \times \{0\}$ , 由于  $\tilde{A}/\iota(A) \cong \mathbb{C}$ , 故  $A$  是  $\tilde{A}$  中的一个极大理想.

我们称如上定义的  $\tilde{A}$  为  $A$  的单位化.

**定理 24.** 定义  $\times \mathbb{C}: CBAgebra \rightarrow CBAgebra$ , 对  $A \in \text{Ob}(CBAgebra)$ ,  $A \mapsto \tilde{A}$ , 对  $f \in \text{Hom}_{CBAgebra}(A, B)$ ,  $f \mapsto f \times \text{id}_{\mathbb{C}}$ ,

$$\begin{aligned}
f \times \text{id}_{\mathbb{C}}: \tilde{A} &\rightarrow \tilde{B} \\
(X, a) &\mapsto (f(X), a),
\end{aligned}$$

则  $\times \mathbb{C}$  确实是函子.

证明.  $f \times \text{id}_{\mathbb{C}}$  显然保持加法和数乘, 我们验证它保持乘法,

$$\begin{aligned} f \times \text{id}_{\mathbb{C}}((X, a)(Y, b)) &= f \times \text{id}_{\mathbb{C}}(XY + bX + aY, ab) \\ &= (f(XY + bX + aY), ab) \\ &= (f(X)f(Y) + bf(X) + af(Y), ab) \\ &= (f(X), a)(f(Y), b) \\ &= (f \times \text{id}_{\mathbb{C}}(X, a))(f \times \text{id}_{\mathbb{C}}(Y, b)). \end{aligned}$$

再验证  $f \times \text{id}_{\mathbb{C}}$  是有界的, 假设  $\|f(X)\| \leq C\|X\|$

$$\|f \times \text{id}_{\mathbb{C}}(X, a)\| = \|(f(X), a)\| = \|f(X)\| + |a| \leq C\|X\| + |a| \leq \max(C, 1)(\|X\| + |a|),$$

于是  $f \times \text{id}_{\mathbb{C}}$  是有界的, 故  $f \times \text{id}_{\mathbb{C}}$  良定. 另外,  $\times \mathbb{C}$  保持恒等映射和与复合可交换是显然的, 故  $\times \mathbb{C}$  确实是函子.  $\square$

**定理 25.** 设  $F: \text{CBAAlgebra} \rightarrow \text{CBAAlgebra}$  是遗忘函子, 则  $(\times \mathbb{C}) \dashv F$ .

证明. 对任意无么交换巴拿赫代数  $A$  和交换巴拿赫代数  $B$ , 定义映射

$$\begin{aligned} \Phi: \text{Hom}_{\text{CBAAlgebra}}(A \times \mathbb{C}, B) &\rightarrow \text{Hom}_{\text{CBAAlgebra}}(A, F(B)) \\ f &\mapsto [X \mapsto f(X, 0)], \end{aligned}$$

依旧将  $B$  和  $F(B)$  看做等同,  $\Phi$  显然是良定的. 再定义

$$\begin{aligned} \Psi: \text{Hom}_{\text{CBAAlgebra}}(A, F(B)) &\rightarrow \text{Hom}_{\text{CBAAlgebra}}(A \times \mathbb{C}, B) \\ g &\mapsto [(X, a) \mapsto g(X) + aI_B], \end{aligned}$$

其中  $I_B$  是  $B$  中单位元, 容易验证  $\Psi$  也是良定的.

考虑  $\Psi(\Phi(f))$ , 对任意的  $(X, a) \in A \times \mathbb{C}$ ,

$$\Psi(\Phi(f))(X, a) = \Phi(f)(X) + aI_B = f(X, 0) + aI_B = f(X, a).$$

再考虑  $\Phi(\Psi(g))$ , 对任意  $X \in X$ ,

$$\Phi(\Psi(g))(X) = \Psi(g)(X, 0) = g(X) + 0I_B = g(X).$$

因此  $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{\text{Hom}_{\text{CBAAlgebra}}(A \times \mathbb{C}, B)}$ ,  $\Psi(\Phi(f)) = \text{id}_{\text{Hom}_{\text{CBAAlgebra}}(A, F(B))}$ .

自然性的验证是简单的, 此处省略, 因此  $(\times \mathbb{C}) \dashv F$ .  $\square$



现进一步假设  $A$  还是一个  $*$ -代数, 我们在  $\tilde{A}$  上定义对合  $(X, a)^* = (X^*, \bar{a})$ , 直接验证即可知道  $\tilde{A}$  也成为一个  $*$ -代数. 但是如果  $A$  是一个  $C^*$  代数, 按如上的范数,  $\tilde{A}$  未必是  $C^*$  代数, 要使它成为  $C^*$  代数, 我们需要更换范数.

**定理 26.** 设  $A$  是一个无么交换  $C^*$  代数, 则在  $\tilde{A}$  上存在唯一的范数使其成为一个  $C^*$  代数, 该范数如下定义: 当  $A$  严格无单位元时, 定义

$$\|(X, a)\|_* = \sup\{\|XY + aY\| : Y \in A, \|Y\| \leq 1\},$$

当  $A$  含单位元时, 定义

$$\|(X, a)\|_* = \max(\|X + aI_A\|, |a|).$$

证明. 严格无单位元情形的证明见 [7] 定理 1.27, 接下来证明当  $A$  含单位元时,  $\tilde{A}$  等距同构与含么交换  $C^*$  代数  $A \oplus \mathbb{C}$ , 其中加法, 乘法和数乘都按分量定义, 范数为直和范数  $\|(X, a)\| = \max(\|X\|, |a|)$ .

做映射

$$\begin{aligned} \varphi: \tilde{A} &\rightarrow A \oplus \mathbb{C} \\ (X, a) &\mapsto (X + aI_A, a), \end{aligned}$$

它将  $\tilde{A}$  中单位元  $(0, 1)$  映为  $A \oplus \mathbb{C}$  中单位元  $(I_A, 1)$ , 显然保持加法和数乘, 现验证乘法和对合,

$$\begin{aligned} \varphi((X, a)(Y, b)) &= \varphi(XY + bX + aY, ab) \\ &= (XY + bX + aY + abI_A, ab) \\ &= (X + aI_A, a)(Y + bI_A, b) \\ &= \varphi(X, a)\varphi(Y, b), \end{aligned}$$

$$\varphi((X, a)^*) = \varphi(X^*, \bar{a}) = (X^* + \bar{a}I_A, \bar{a}) = (X + aI_A, a)^* = \varphi(X, a)^*,$$

最后验证等距,

$$\|\varphi(X, a)\| = \max(\|X + aI_A\|, |a|) = \|(X, a)\|_*,$$

最后,  $\varphi$  有逆映射  $(Y, b) \mapsto (Y - bI_A, b)$ , 故  $\varphi$  是双射, 因此是等距同构.  $\square$

**定理 27.** 设  $A$  是一个无么交换巴拿赫代数, 则  $\sigma(A) \sqcup \{\bullet\} = \sigma_0(A) = \sigma(\tilde{A})$ .

证明. 我们将依旧在  $\tilde{A}$  中将  $A \rightarrow A \times \{0\}$  等同起来. 对任意  $f \in \sigma(A)$ , 我们将它延拓到  $\tilde{A}$  上, 记为  $\tilde{f}$ , 因为同态必须满足  $\tilde{f}(0, a) = a$ , 则唯一的延拓方式为

$$\tilde{f}(X, a) = \tilde{f}(X, 0) + a\tilde{f}(0, 1) = f(X) + a.$$

反过来, 对任意  $h \in \sigma(\tilde{A})$ , 它限制在  $A$  上必须也是代数同态, 于是要么  $h|_A \in \sigma(A)$ , 要么  $h(X, a) = a$ , 即对应极大理想  $A = \ker h$ . 因此,  $\sigma(A) \sqcup \{\bullet\} = \sigma_0(A) = \sigma(\tilde{A})$ .  $\square$

因为  $\sigma(\tilde{A})$  是紧的, 由点集拓扑知,  $\sigma(A)$  是局部紧的, 并且其单点紧化就是  $\sigma_0(A) = \sigma(\tilde{A})$ , 添加的单点对应 0 同态.

类似  $\sigma$ , 容易证明  $\sigma_0$  是从  $\mathbf{CBAgebra}$  到  $\mathbf{CHaus}_\bullet$  的函子, 基点即为上述添加的单点, 并且显然下图交换, 其中  $F$  为遗忘基点函子.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CBAgebra} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{CHaus}^{op} \\ \times \mathbf{C} \uparrow & & \uparrow F \\ \mathbf{CBAgebra} & \xrightarrow{\sigma_0} & \mathbf{CHaus}_\bullet^{op} \end{array}$$

**定理 28.** 对任意紧豪斯多夫空间  $X$ , 定义  $\sqcup\{\bullet\}: X \rightarrow X \sqcup \{\bullet\}$ , 对连续映射  $f: X \rightarrow Y$ , 定义  $\sqcup\{\bullet\}(f): X \sqcup \{\bullet_X\} \rightarrow Y \sqcup \{\bullet_Y\}$ ,

$$\sqcup\{\bullet\}(f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X, \\ \bullet_Y, & x = \bullet_X, \end{cases}$$

则以上定义了函子  $\sqcup\{\bullet\}: \mathbf{CHaus} \rightarrow \mathbf{CHaus}_\bullet$ , 它是遗忘基点函子的左伴随,  $(\sqcup\{\bullet\}) \dashv F$ .

证明. 只需注意紧豪斯多夫空间并上单点仍是紧豪斯多夫的,  $\sqcup\{\bullet\}$  的函子性是显然的. 我们定义

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbf{Hom}_{\mathbf{CHaus}_\bullet}(X \sqcup \{\bullet_X\}, (Y, y)) &\rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{CHaus}}(X, Y) \\ f &\mapsto f|_X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi: \mathbf{Hom}_{\mathbf{CHaus}}(X, Y) &\rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{CHaus}_\bullet}(X \sqcup \{\bullet_X\}, (Y, y)) \\ g &\mapsto \Psi(g), \end{aligned}$$

其中

$$\Psi(g)(x) = \begin{cases} g(x), & x \in X, \\ y, & x = \bullet_X, \end{cases}$$

显然两映射良定, 互逆, 并且具有自然性.  $\square$

下图的交换性则直接由  $\sigma_0$  的定义导出.

$$\begin{array}{ccc}
\text{CBAgebra} & \xrightarrow{\sigma} & \text{CHaus}^{op} \\
\downarrow F & & \downarrow \sqcup\{\bullet\} \\
\text{CBAgebra} & \xrightarrow{\sigma_0} & \text{CHaus}_{\bullet}^{op}
\end{array}$$

**定理 29.** 对带基点的紧豪斯多夫空间  $(X, x) \in \text{Ob}(\text{CHaus}_{\bullet})$ , 定义  $C_0(X)$  为在无穷远点消失的连续函数空间, 即

$$C_0(X) = \{f \in C(X) : f(x) = 0\},$$

设  $\varphi: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  是  $\text{CHaus}_{\bullet}$  中的一个态射, 即保持基点的连续映射, 定义  $C_0(\varphi): C_0(Y) \rightarrow C_0(X)$  为

$$C_0(\varphi)(g) = g \circ \varphi, \quad \forall g \in C_0(Y),$$

则以上定义的  $C_0: \text{CHaus}_{\bullet} \rightarrow C^*\text{Algebra}$  是一个函子.

证明. 类似函子  $C$ , 容易验证  $C_0(X)$  确实是交换  $C^*$  代数, 只是未必含么, 由  $g$  和  $\varphi$  的连续性知  $C_0(\varphi)$  连续, 并且  $g(\varphi(x)) = g(y) = 0$ , 即在无穷远点消失, 所以  $C_0(\varphi)$  良定, 函子性由拉回映射的构造直接得到.  $\square$

接下来证明无么版本的盖尔方德对偶.

**定理 30** (无么盖尔方德-奈马克定理). 若  $A$  是一个无么交换  $C^*$  代数, 则盖尔方德变换  $\Gamma_A$  是从  $A$  到  $C_0(\sigma_0(A))$  的等距  $*$ -同构.

证明. 将含么版本的盖尔方德-奈马克定理应用到  $\tilde{A}$  上, 得到  $\tilde{A}$  与  $C(\sigma(\tilde{A}))$  的等距  $*$ -同构, 而  $A$  嵌入  $\tilde{A}$  是一个极大理想, 因此  $\Gamma_{\tilde{A}}|_A = \Gamma_A$  是从  $A$  到  $\Gamma_A(A)$  的等距  $*$ -同构,  $\Gamma_A(A)$  也是  $C(\sigma(\tilde{A}))$  的一个极大理想. 由于  $\sigma(\tilde{A})$  与  $\text{Max}(\tilde{A})$  之间存在一一对应, 对应极大理想  $A$  的同态无非就是限制在  $A$  上为 0 的同态, 记为  $\tilde{0}$ , 则

$$\Gamma_A(A) = \{f : f(\tilde{0}) = 0\},$$

而已知  $\sigma(\tilde{A}) = \sigma_0(A)$ , 以  $\tilde{0}$  为基点, 则由  $C_0$  的定义知  $C_0(\sigma_0(A)) = \{f : f(\tilde{0}) = 0\}$ , 于是  $\Gamma_A$  是从  $A$  到  $C_0(\sigma_0(A))$  的等距  $*$ -同构.  $\square$

**定理 31** (无么盖尔方德对偶). 函子  $\sigma_0$  是  $C^*\text{Algebra}$  与  $\text{CHaus}_{\bullet}$  之间的对偶等价, 其拟逆函子即为  $C_0$ .

证明. 首先我们注意到  $\text{CHaus}_{\bullet}$  与余切片范畴  $\bullet/\text{CHaus}$  本质是同一概念, 前者对象形如  $(X, x)$ , 其中  $x \in X$ , 而后者对象形如  $(X, f)$ , 其中  $f: \{\bullet\} \rightarrow X$ , 只需将  $f(\bullet)$  看做基点即可, 态射均为保持基点的连续映射, 故  $\text{CHaus}_{\bullet} \cong \bullet/\text{CHaus}$ . 而显然  $\sigma(\bullet) = \mathbb{C}$ , 于是盖尔方德对偶诱导

出范畴等价  $(C^*\text{Algebra}/\mathbb{C})^{\text{op}} \cong \bullet/\text{CHaus} \cong \text{CHaus}_\bullet$ , 因此只需证明范畴等价  $C^*\text{Algebra} \cong C^*\text{Algebra}/\mathbb{C}$ .

定义函子  $U: C^*\text{Algebra} \rightarrow C^*\text{Algebra}/\mathbb{C}$ , 在对象上, 它将无么  $C^*$  代数  $A$  映为它的单位化  $(\tilde{A}, \pi_A)$ , 其中  $\pi_A: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$  是标准的投影映射  $(X, a) \mapsto a$ . 在态射上, 将  $*$ -同态  $\varphi: A \rightarrow B$  映为  $\tilde{\varphi}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ ,  $\tilde{\varphi}(X, a) = (\varphi(X), a)$ , 由于  $\tilde{\varphi}(0, 1) = (0, 1)$ , 显然满足  $\pi_B \circ \tilde{\varphi} = \pi_A$ .

再构造函数子  $K: C^*\text{Algebra}/\mathbb{C} \rightarrow C^*\text{Algebra}$ , 在对象上, 将  $(C, \pi_C)$  映为其核  $\ker \pi_C$ , 因为  $\pi_C$  是到  $\mathbb{C}$  的保么  $*$ -同态,  $\ker \pi_C$  是  $C$  的极大理想, 从而作为代数是一个未必含么的  $C^*$  代数. 在态射上, 若  $f: (C, \pi_C) \rightarrow (D, \pi_D)$  是切片范畴中的态射, 则满足关系  $\pi_D \circ f = \pi_C$ , 由此容易推出  $f(\ker \pi_C) \subseteq \ker \pi_D$ , 故  $f$  限制在  $\ker \pi_C$  上给出了一个未必保么的  $*$ -同态  $K(f): \ker \pi_C \rightarrow \ker \pi_D$ .

对于任意无么  $C^*$  代数  $A$ , 有  $K(U(A)) = \ker \pi_A = \{(X, 0) : X \in A\} \cong A$ . 对于切片范畴中的任意对象  $(C, \pi)$ , 我们有  $U(K(C, \pi)) = \widetilde{(\ker \pi, \pi_{\ker \pi})}$ , 做映射  $\psi: \widetilde{(\ker \pi, \pi_{\ker \pi})} \rightarrow C$ ,  $(X, a) \mapsto (X + aI_C)$ , 因为  $C/\ker \pi \cong \mathbb{C}$ , 则由陪集分解知  $\psi$  是代数同构, 等距性由  $C^*$  范数唯一性保证, 另外由  $\pi_{\ker \pi}(X, c) = \pi(\psi(X, c))$  知  $\pi_{\ker \pi} = \pi \circ \psi$ , 即  $\psi$  保持切片范畴结构. 态射层面的自然性是容易验证的, 于是我们有范畴等价  $C^*\text{Algebra} \cong C^*\text{Algebra}/\mathbb{C}$ , 函子复合得到  $\sigma_0$  与  $C_0$  是  $C^*\text{Algebra}$  与  $\text{CHaus}_\bullet$  之间的对偶等价.  $\square$

由此可以得到免费赠送的两个定理.

**定理 32.**  $\times\mathbb{C}: C^*\text{Algebra} \rightarrow C^*\text{Algebra}$  与遗忘函子  $F: C^*\text{Algebra} \rightarrow C^*\text{Algebra}$  是一对伴随函子,  $(\times\mathbb{C}) \dashv F$ .

**定理 33.** 复合函子  $\bar{\Gamma} = C_0 \circ \sigma_0: \text{CAlgebra} \rightarrow C^*\text{Algebra}$  与遗忘函子  $F: C^*\text{Algebra} \rightarrow \text{CAlgebra}$  是一对伴随函子,  $\bar{\Gamma} \dashv F$ .

最后回到单位化, 我们将之前定义的  $C^*$  单位化函子也记为  $\times\mathbb{C}$ , 我们证明这种  $C^*$  单位化与先单位化再按上一节的方法  $C^*$  化得到的两个交换  $C^*$  代数是等距同构的.

**定理 34.** 符号如上,  $F$  为遗忘函子, 则下图交换.

$$\begin{array}{ccc} C^*\text{Algebra} & \xleftarrow{\bar{\Gamma}} & \text{CAlgebra} \\ \times\mathbb{C} \uparrow & & \times\mathbb{C} \uparrow \\ C^*\text{Algebra} & \xrightarrow{F} & \text{CAlgebra} \end{array}$$

证明. 对任意无么交换  $C^*$  代数  $A$ , 做映射  $\tilde{A} \rightarrow \Gamma(\tilde{A})$ ,  $(X, a) \mapsto \widehat{(X, a)}$ , 这显然是双射, 并且

$$\|\widehat{(X, a)}\|_\infty = \sup\{|h(X, a)| : h \in \sigma(\tilde{A})\} = \max\left(\sup_{h \in \sigma(A)} |h(X) + a|, |a|\right).$$

接下来分类讨论, 若  $A$  已含单位元, 则

$$\|(X, a)\|_* = \max(\|X + aI_A\|, |a|),$$

由含么盖尔方德对偶知盖尔方德变换  $\Gamma_A$  是等距同构, 故

$$\|X + aI_A\| = \|\Gamma_A(X + aI_A)\|_\infty = \sup_{h \in \sigma(A)} |\widehat{X}(h) + a\widehat{I_A}(h)| = \sup_{h \in \sigma(A)} |h(X) + a|,$$

即  $\|(X, a)\|_* = \|\widehat{(X, a)}\|_\infty$ . 若  $A$  严格不含单位元, 则  $0 \in \overline{\sigma(A)}$ ,  $h$  可以任意逼近 0, 于是知不可能有  $|a| > \sup_{h \in \sigma(A)} |h(X) + a|$ , 故

$$\|\widehat{(X, a)}\|_\infty = \sup_{h \in \sigma(A)} |h(X) + a|.$$

而  $\|(X, a)\|_* = \sup\{\|XY + aY\| : Y \in A, \|Y\| \leq 1\}$ , 由无么盖尔方德对偶知

$$\|XY + aY\| = \|\Gamma_A(XY + aY)\| = \sup_{h \in \sigma_0} |h(X)h(Y) + ah(Y)| = \sup_{h \in \sigma_0} |h(X) + a||h(Y)|,$$

交换两个 sup 得

$$\|(X, a)\|_* = \sup_{\|Y\| \leq 1} \left( \sup_{h \in \sigma_0(A)} |h(X) + a| \cdot |h(Y)| \right) = \sup_{h \in \sigma_0(A)} \left( |h(X) + a| \cdot \sup_{\|Y\| \leq 1} |h(Y)| \right),$$

其中  $\sup_{\|Y\| \leq 1} |h(Y)| = \|h\| \leq 1$ , 又因  $\sigma_0(A)$  只比  $\sigma(A)$  多一个 0 函数, 不影响 sup 的值, 所以有  $\|(X, a)\|_* \leq \|\widehat{(X, a)}\|_\infty$ .

另一方面,  $C^*$  代数理论告诉我们 ([6] 引理 6.17), 任何  $C^*$  代数中都存在逼近单位元网  $\{E_\alpha\}$ , 其中对每个  $\alpha$ , 都满足  $\|E_\alpha\| \leq 1$ , 并且对任意的  $X \in A$ , 都有  $\lim_\alpha \|XE_\alpha - X\| = 0$ . 现取任意  $h \in \sigma(A)$ , 由于  $h$  非零, 故存在  $X \in A$ , 使得  $h(X) \neq 0$ , 故有

$$h(X) = h\left(\lim_\alpha XE_\alpha\right) = \lim_\alpha h(XE_\alpha) = \lim_\alpha (h(X) \cdot h(E_\alpha)) = h(X) \cdot \lim_\alpha h(E_\alpha),$$

于是知  $\lim_\alpha h(E_\alpha) = 1$ , 所以

$$\|h\| = \sup_{\|Y\| \leq 1} |h(Y)| \geq \limsup_\alpha |h(E_\alpha)| = 1,$$

进而得到  $\|(X, a)\|_* \geq \|\widehat{(X, a)}\|_\infty$ , 所以有  $\|(X, a)\|_* = \|\widehat{(X, a)}\|_\infty$ .

于是我们得到  $(X, a) \mapsto \widehat{(X, a)}$  是等距的, 所以  $\Gamma(\tilde{A})$  在  $\overline{\Gamma(\tilde{A})}$  内稠密且闭, 于是  $\tilde{A} \cong \Gamma(\tilde{A}) \cong \overline{\Gamma(\tilde{A})}$ . 态射层面的自然性则由盖尔方德变换的自然性保证.  $\square$

如果忽略  $C^*$  结构, 两种单位化作为巴拿赫代数是等距同构的, 但一般不是等距同构.

**定理 35.** 设  $A$  是一个无么交换  $C^*$  代数, 则存在正常数  $C_1$  和  $C_2$ , 使得  $C_1\|(X, a)\|_* \leq \|(X, a)\| \leq C_2\|(X, a)\|_*$ .

证明. 先前已经证明  $\|(X, a)\|_* = \|\widehat{(X, a)}\|_\infty$ , 又因  $\|\widehat{(X, a)}\|_\infty \leq \|(X, a)\|$ , 得到  $\|(X, a)\|_* \leq \|(X, a)\|$ , 因此可以直接取  $C_1 = 1$ .

另一方面,  $\|(X, a)\|_* = \|\widehat{(X, a)}\|_\infty = \max(\sup_{h \in \sigma(A)} |h(X) + a|, |a|)$ , 故  $\|(X, a)\|_* \geq |a|$  且  $\|(X, a)\|_* \geq \sup_{h \in \sigma(A)} |h(X) + a|$ , 由无么盖尔方德对偶知  $\|X\| = \|\widehat{X}\|_\infty = \sup_{h \in \sigma(A)} |h(X)|$ , 又由

$$|h(X)| = |(h(X) + a) - a| \leq |h(X) + a| + |a|$$

可得

$$|h(X)| \leq \|(X, a)\|_* + \|(X, a)\|_* = 2\|(X, a)\|_*,$$

两边取上确界后便得到

$$\|X\| \leq 2\|(X, a)\|_*,$$

综上所述得到

$$\|(X, a)\| = \|X\| + |a| \leq 2\|(X, a)\|_* + \|(X, a)\|_* = 3\|(X, a)\|_*,$$

因此可取  $C_2 = 3$ . □

由该定理推出  $\text{id}_{A \times \mathbb{C}}: (A \times \mathbb{C}, \|\cdot\|) \rightarrow (A \times \mathbb{C}, \|\cdot\|_\infty)$  是一个有界的巴拿赫代数同构, 即下图交换.

$$\begin{array}{ccc} C^*\text{CAlgebra} & \xrightarrow{F} & \text{CBAgebra} \\ \times \mathbb{C} \uparrow & & \times \mathbb{C} \uparrow \\ C^*\text{CAlgebra} & \xrightarrow{F} & \text{CBAgebra} \end{array}$$

### 3.2 非退化同态, 真映射与单点紧化

本节说明下图交换.

$$\begin{array}{ccc} C^*\text{CAlgebra} & \xrightleftharpoons[C_0]{\sigma_0} & \text{CHaus}_\bullet^{op} \\ \uparrow \iota & & \sqcup \{\bullet\} \uparrow \\ C^*\text{CAlgebra}_{nd} & \xrightleftharpoons[C_0]{\sigma} & \text{LCH}_p^{op} \end{array}$$

**定义 12 (真映射).** 设  $X$  和  $Y$  是拓扑空间,  $f: X \rightarrow Y$  是连续映射, 如果  $K \subseteq Y$  的任意的紧子集, 都有  $f^{-1}(K)$  是  $X$  的紧子集, 则称  $f$  是一个真映射.

真映射的复合显然也是真映射.

**定义 13.** 定义范畴  $\text{LCH}_p$  的对象为局部紧豪斯多夫空间, 态射为局部紧豪斯多夫空间之间的真映射.

**定理 36.** 我们定义  $\sqcup\{\bullet\}: \text{LCH}_p \rightarrow \text{CHaus}_\bullet$ , 它将局部紧豪斯多夫空间映为其单点紧化, 设  $f \in \text{Hom}_{\text{LCH}_p}(X, Y)$ , 定义  $\sqcup\{\bullet\}(f) = \bar{f}: X \sqcup \{\bullet_X\} \rightarrow Y \sqcup \{\bullet_Y\}$ ,

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X, \\ \bullet_Y, & x = \bullet_X, \end{cases}$$

则如上定义的  $\sqcup\{\bullet\}$  是一个函子.

证明. 只需证明  $\bar{f}$  是连续映射, 设  $U \subseteq Y \sqcup \{\bullet_Y\}$  是开子集, 若  $\bullet_Y$  不在  $U$  中, 由  $f$  的连续性知  $\bar{f}^{-1}(U)$  在  $X \sqcup \{\bullet_X\}$  中开. 若  $\bullet_Y \in U$ , 由单点紧化的定义知  $Y \sqcup \{\bullet_Y\} - U$  是  $Y \sqcup \{\bullet_Y\}$  中紧集, 又由  $f$  是真映射知  $\bar{f}^{-1}(Y \sqcup \{\bullet_Y\} - U)$  是  $X \sqcup \{\bullet_X\}$  中紧集, 故  $\bar{f}^{-1}(U)$  是  $X \sqcup \{\bullet_X\}$  中包含  $\bullet_X$  的开集, 因此  $\bar{f}$  连续.  $\square$

由点集拓扑知函子  $\sqcup\{\bullet\}$  是本质满的, 但不是全的, 因此可以将  $\text{LCH}_p$  看做  $\text{CHaus}_\bullet$  的子范畴.

**定理 37.** 带基点的紧豪斯多夫空间之间的保基点连续映射  $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  限制在  $X - \{x\}$  上得到的映射  $f|_{X-\{x\}}: X - \{x\} \rightarrow Y - \{y\}$  是真映射当且仅当  $f^{-1}(y) = \{x\}$ .

证明. 若  $f|_{X-\{x\}}$  是真映射, 显然  $f^{-1}(y) = \{x\}$ . 反过来, 若  $f^{-1}(y) = \{x\}$ , 设  $K$  是  $Y - \{y\}$  中紧子集, 因此也是  $Y$  中紧集, 则  $Y - K$  是包含  $y$  的开子集, 故  $f^{-1}(Y - K)$  是  $X$  中包含  $x$  的开子集, 则  $X - f^{-1}(Y - K) = X - f^{-1}((Y - K - \{y\}) \cup \{y\}) = X - f^{-1}(Y - \{y\} - K) - f^{-1}(y) = (X - \{x\}) - f|_{X-\{x\}}^{-1}((Y - \{y\}) - K) = f|_{X-\{x\}}^{-1}(K)$  是  $X - \{x\}$  中紧子集, 于是  $f|_{X-\{x\}}$  是真映射.  $\square$

**定义 14** (非退化同态). 设  $A$  和  $B$  是无么交换  $C^*$  代数,  $f: A \rightarrow B$  是  $*$ -同态, 如果

$$\{f(X)Y : X \in A, Y \in B\}$$

张成的线性空间在  $B$  中稠密, 则称  $f$  是非退化的.

非退化同态的复合显然也是非退化的. 我们将带非退化同态的无么交换  $C^*$  代数范畴记为  $C^*\text{Algebra}_{nd}$ , 它显然是  $C^*\text{Algebra}$  的子范畴.

**定理 38.**  $\sigma: C^*\text{Algebra}_{nd} \rightarrow \text{LCH}_p^{op}$  是函子.

证明. 对交换  $C^*$  代数  $A$ , 已知  $\sigma(A) \sqcup \{\bullet\} = \sigma_0(A) \cong \sigma(\tilde{A})$  是紧的, 因此  $\sigma(A)$  确实是局部紧豪斯多夫空间, 只需证明  $\sigma$  将非退化同态映为真映射.

设  $f: A \rightarrow B$  是非退化同态,  $\sigma(f): \sigma(B) \rightarrow \sigma(A)$ ,  $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ , 显然  $\sigma_0(f): \sigma_0(B) \rightarrow \sigma_0(A)$  是保持基点的连续映射, 假设  $0_B$  是  $B$  上的 0 同态,  $0_A$  是  $A$  上的 0 同态, 则  $\sigma_0(f)(0_B) = 0_A$ , 我们来证明  $\sigma_0(f)^{-1}(0_A) = \{0_B\}$ . 假设  $\varphi \in \sigma_0(B)$ ,  $\varphi \circ f = 0_A$ , 则  $\varphi$  必须在  $f(A)$  上消失, 由于  $\varphi$  是同态, 从而在  $\{f(X)Y : X \in A, Y \in B\}$  上也消失, 由  $f$  是非退化的,  $\{f(X)Y : X \in A, Y \in B\}$  张成的线性空间在  $B$  中稠密, 故  $\varphi$  必须在  $B$  上消失, 故  $\varphi = 0_B$ . 由上一定理知  $\sigma_0(f)|_{\sigma(B)} = \sigma(f)$  是真映射.  $\square$

由  $\sigma$  和  $\sigma_0$  的定义知道下图交换.

$$\begin{array}{ccc} C^*\text{Algebra} & \xrightarrow{\sigma_0} & \text{CHaus}_{\bullet}^{op} \\ \uparrow \iota & & \uparrow \sqcup\{\bullet\} \\ C^*\text{Algebra}_{nd} & \xrightarrow{\sigma} & \text{LCH}_p^{op} \end{array}$$

**定义 15** (在无穷远点消失). 设  $X$  是局部紧豪斯多夫空间,  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  是连续映射, 若对任意正数  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $X$  的紧子集  $K$ , 使得任意  $x \in X - K$ , 都有  $|f(x)| < \varepsilon$ , 则称  $f$  在是无穷远点消失的.  $X$  上所有在无穷远点消失的函数组成的集合记为  $C_0(X)$ .

显然  $C_0(X)$  是一个未必含么的交换  $C^*$  代数.

**定理 39.** 定义  $C_0: \text{LCH}_p \rightarrow C^*\text{Algebra}_{nd}^{op}$ , 它将局部紧豪斯多夫空间  $X$  映为其上在无穷远点消失的函数集  $C_0(X)$ , 将真映射  $f: X \rightarrow Y$  映为  $C_0(f): C_0(Y) \rightarrow C_0(X)$ ,  $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ , 则如上定义的  $C_0$  是函子.

证明. 首先证明  $C_0(f) = \varphi \circ f$  的良定性, 对任意正数  $\varepsilon$ , 存在  $Y$  中紧集  $K$ , 使得  $\varphi$  在  $Y - K$  上的值小于  $\varepsilon$ , 由  $f$  是真映射知  $f^{-1}(K)$  是  $X$  中紧集, 并且在  $X - f^{-1}(K)$  上  $\varphi \circ f$  的值小于  $\varepsilon$ , 故  $\varphi \circ f \in C_0(X)$ .

现只需证明  $C_0(f)$  是非退化同态, 它显然是  $*$ -同态. 任取  $\psi \in C_0(X)$  和  $\varepsilon > 0$ , 则存在  $X$  的紧子集  $K$  使得  $\psi$  在  $X - K$  上的值小于  $\varepsilon$ . 因为  $f(K)$  是  $Y$  中紧集, 则由乌雷松引理知存在连续函数  $\varphi \in C_0(Y)$ ,  $\varphi: Y \rightarrow [0, 1]$ , 使得  $\varphi(f(K)) = \{1\}$ . 于是在  $K$  上,

$$\sup_{x \in K} |C_0(f)(\varphi)(x) \cdot \psi(x) - \psi(x)| = 0 < \varepsilon,$$

在  $X - K$  上,

$$\sup_{x \in X-K} |C_0(f)(\varphi)(x) \cdot \psi(x) - \psi(x)| = \sup_{x \in X-K} |\psi(x)| |\varphi(f(x)) - 1| \leq \sup_{x \in X-K} |\psi(x)| \leq \varepsilon,$$



因此在  $X$  上, 有

$$\|C_0(f)(\varphi) \cdot \psi - \psi\|_\infty = \sup_{x \in X} |C_0(f)(\varphi)(x) \cdot \psi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon,$$

于是知

$$\{C_0(f)(\varphi) \cdot \psi : \varphi \in C_0(Y), \psi \in C_0(X)\}$$

已在  $C_0(X)$  中稠密, 则其张成的线性空间更在  $C_0(X)$  中稠密, 即  $C_0(f)$  是非退化的.  $\square$

**定理 40.** 设  $X$  是局部紧豪斯多夫空间, 则映射  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  在无穷远点消失当且仅当其连续延拓为  $F: X \sqcup \{\bullet\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X, \\ 0, & x = \bullet. \end{cases}$$

证明. 假设  $f$  在无穷远点消失, 我们证明  $F$  连续. 设  $U$  是  $\mathbb{C}$  中开集, 若  $0 \notin U$ , 则由  $f$  的连续性知  $F^{-1}(U)$  开. 若  $0 \in U$ , 我们通过证明  $F^{-1}(U)$  中每个点都有含于  $F^{-1}(U)$  的开邻域来证明  $F^{-1}(U)$  是开集. 设  $x \in F^{-1}(U)$ , 若  $x \in X$ , 则  $f^{-1}(U)$  就是  $x$  的开邻域. 若  $x = \bullet$ , 任取  $\varepsilon > 0$  使得开球

$$B(0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$$

含于  $U$  中, 则由  $f$  在无穷远点消失知存在  $X$  中的一个紧子集  $K$ , 使得对所有  $y \in X - K$ , 都有  $|f(y)| < \varepsilon$ , 则  $\bullet \in X \sqcup \{\bullet\} - K \subseteq F^{-1}(B(0, \varepsilon)) \subseteq F^{-1}(U)$ , 且  $X \sqcup \{\bullet\} - K$  显然开, 于是  $F^{-1}(U)$  是  $X \sqcup \{\bullet\}$  中开集, 得到  $F$  连续.

现假设  $F$  是连续延拓, 任取  $\varepsilon > 0$ , 由于  $F$  在  $\bullet$  点连续, 对于  $\mathbb{C}$  中的开球  $B(0, \varepsilon)$ ,  $F^{-1}(B(0, \varepsilon))$  就是  $X \sqcup \{\bullet\}$  中包含  $\bullet$  的一个开邻域, 于是  $X \sqcup \{\bullet\} - F^{-1}(B(0, \varepsilon)) = X - f^{-1}(B(0, \varepsilon))$  是  $X$  中紧集, 并且对任意  $x \in X - (X - f^{-1}(B(0, \varepsilon))) = f^{-1}(B(0, \varepsilon))$ , 都有

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

即映射  $f$  在无穷远点消失.  $\square$

由此可得下图交换.

$$\begin{array}{ccc} C^* \text{Algebra} & \xleftarrow{C_0} & \text{CHaus}_{\bullet}^{op} \\ \uparrow \iota & & \uparrow \sqcup \{\bullet\} \\ C^* \text{Algebra}_{nd} & \xleftarrow{C_0} & \text{LCH}_p^{op} \end{array}$$

**定理 41.** 函子  $\sigma: C^* \text{Algebra}_{nd} \rightarrow \text{LCH}_p^{op}$  是范畴等价, 其拟逆为  $C_0$ .

证明. 我们已经证明过了函子  $\sigma_0$  是  $C^*\text{Algebra}$  与  $\text{CHaus}_\bullet$  之间的对偶等价, 其拟逆函子即为  $C_0$ , 而又已证明  $\sigma_0$  限制在子范畴  $C^*\text{Algebra}_{nd}$  上就是  $\sigma: C^*\text{Algebra}_{nd} \rightarrow \text{LCH}_p^{op}$ , 而  $C_0: \text{CHaus}_\bullet \rightarrow C^*\text{Algebra}^{op}$  限制在子范畴  $\text{LCH}_p$  上就是  $C_0: \text{LCH}_p \rightarrow C^*\text{Algebra}_{nd}^{op}$ , 因此显然  $\sigma$  与  $C_0$  互为拟逆.  $\square$

此处做一点补充, 我们可以在代数侧不使用非退化同态, 而是将拓扑侧的真映射条件放宽, 使用所谓的部分真映射. 假设  $X$  和  $Y$  是两个局部紧豪斯多夫空间, 存在一个箭头  $X \rightarrow Y$  当且仅当存在  $X$  的开子集  $U$  和从  $U$  到  $Y$  的一个真映射, 这样的箭头称为部分真映射. 设  $X \supseteq U \xrightarrow{f} Y$  和  $Y \supseteq V \xrightarrow{g} Z$  是两个部分真映射, 则它们的复合映射定义为部分真映射

$$X \supseteq (U \cap g^{-1}(V)) \xrightarrow{g \circ f} Z,$$

带部分真映射的局部紧豪斯多夫空间范畴记为  $\text{LCH}_{pp}$ , 则可以证明范畴等价  $R: \text{CHaus}_\bullet \rightarrow \text{LCH}_{pp}$ , 它将带点紧豪斯多夫空间  $(X, x)$  映为局部紧豪斯多夫空间  $X - \{x\}$ , 将保基点的连续映射  $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  映为部分真映射

$$(X - \{x\}) \supseteq (X - f^{-1}(y)) \xrightarrow{R(f)} Y - \{y\},$$

$R$  的拟逆函子为单点紧化, 证明见 [6] 引理 5.2, 于是可以推出对偶等价  $C^*\text{Algebra} \rightarrow \text{LCH}_{pp}^{op}$ .

### 3.3 乘子代数与斯通-切赫紧化

**定义 16** (双中心化子). 设  $A$  为一个无么  $C^*$  代数, 一个双中心化子是指一对映射  $(L, R)$ , 其中  $L, R: A \rightarrow A$ , 满足对所有的  $X, Y \in A$ , 有  $R(X)Y = XL(Y)$ . 其中  $L$  称为左中心化子,  $R$  称为右中心化子.

**定义 17** (乘子代数).  $A$  的所有双中心化子  $(L, R)$  的集合称为  $A$  的乘子代数, 记为  $M(A)$ .

**定理 42.** 设  $(L, R) \in M(A)$ , 则有

$$L(XY) = L(X)Y, \quad R(XY) = XR(Y),$$

并且  $L$  和  $R$  是线性且有界的, 二者的算子范数相等,  $\|L\| = \|R\|$ .

证明见 [23] 定理 2.2.8.

我们将  $M(A)$  变成一个  $C^*$  代数. 对  $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in M(A)$  和标量  $\lambda \in \mathbb{C}$ , 定义

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2),$$

$$\lambda(L, R) = (\lambda L, \lambda R),$$

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1 \circ L_2, R_2 \circ R_1).$$

显然这使得  $M(A)$  构成含么的  $\mathbb{C}$ -代数, 单位元是恒等映射  $(\text{id}_A, \text{id}_A)$ , 再定义对合

$$(L, R)^* = (R^*, L^*),$$

其中  $R^*(X) = (R(X^*))^*$ ,  $L^*(X) = (L(X^*))^*$ . 再定义范数,

$$\|(L, R)\| = \|L\| = \|R\|,$$

可以证明这使得  $M(A)$  成为一个  $C^*$  代数.

现将  $A$  嵌入  $M(A)$  中, 对  $\forall X \in A$ , 可定义左乘算子

$$L_X: A \rightarrow A, \quad Y \mapsto XY,$$

类似还有右乘算子

$$R_X: A \rightarrow A, \quad Y \mapsto YX,$$

容易看出  $(L_X, R_X)$  确实是一个双中心化子,  $\iota: X \mapsto (L_X, R_X)$  是嵌入映射.

**定理 43.**  $M(A)$  可交换当且仅当  $A$  可交换.

证明. 首先注意到当  $A$  可交换时, 相容性条件  $L(X)Y = XR(Y)$  迫使  $L = R$ , 而

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1 \circ L_2, R_2 \circ R_1) = (L_1 \circ L_2, L_2 \circ L_1),$$

因此  $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$ , 同理  $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ , 故  $(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_2, R_2)(L_1, R_1)$ ,  $M(A)$  可交换. 反过来, 由于  $A$  可嵌入  $M(A)$ , 当  $M(A)$  可交换时当然  $A$  也可交换.  $\square$

**定义 18** (本质理想). 设  $A$  是一个无么  $C^*$  代数,  $I$  是  $A$  的理想, 若对  $A$  的任意其他非零理想  $J$ , 都有  $I \cap J \neq \{0\}$ , 则称  $I$  是  $A$  的一个本质理想.

**定理 44.**  $A$  是  $M(A)$  中的一个本质理想.

乘子代数有如下泛性质.

**定理 45.** 设  $A$  是一个无么  $C^*$  代数, 对任意单同态  $f: A \rightarrow B$ , 都存在唯一一个同态  $\varphi: B \rightarrow M(A)$ , 使得下图交换, 其中  $\iota$  是嵌入映射.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow \iota & \downarrow \varphi \\ & & M(A) \end{array}$$

当  $A \cong f(A)$  在  $B$  中是本质理想时,  $\varphi$  是单射.

证明见 [23] 定理 2.2.14.

**定理 46.** 若  $A$  是一个含么的  $C^*$  代数, 则  $A \cong M(A)$ .

证明. 做映射  $\varphi: M(A) \rightarrow A$ ,  $(L, R) \mapsto L(I)$ , 其中  $I$  是  $A$  中单位元, 显然  $\varphi(\iota(X)) = \varphi(L_X, R_X) = L_X(I) = X$ ,  $\iota(\varphi(L, R)) = \iota(L(I)) = (L_{L(I)}, R_{L(I)})$ , 又由  $L(I) = L(I)I = IR(I) = R(I)$ , 可知对任意  $Y \in A$ ,  $L_{L(I)}(Y) = L(I)Y = L(IY) = L(Y)$ ,  $R_{L(I)}(Y) = YL(I) = YR(I) = R(Y)$ , 故  $(L_{L(I)}, R_{L(I)}) = (L, R)$ , 即  $\varphi$  与  $\iota$  互逆, 故  $A \cong M(A)$ .  $\square$

**定理 47.** 若  $A$  和  $B$  是无么  $C^*$  代数,  $\varphi: A \rightarrow M(B)$  是非退化同态, 则存在唯一的延拓保么同态  $\bar{\varphi}: M(A) \rightarrow M(B)$ .

证明见 [14] 定理 2.51.

**定义 19** (严格拓扑).  $M(A)$  上使得从  $M(A)$  到  $A$  的映射族

$$\{(L, R) \mapsto L(X) : \forall X \in A\} \cup \{(L, R) \mapsto R(X) : \forall X \in A\}$$

中所有映射均连续的最弱拓扑称为  $M(A)$  上的严格拓扑, 其中  $A$  上的拓扑为范数诱导的拓扑.

严格拓扑通常比范数诱导的拓扑更粗, 可以证明, 当  $M(A)$  带严格拓扑时,  $A$  在  $M(A)$  中稠密.

**定义 20.** 定义范畴  $C^*\text{Algebra}_{nd,m}$ , 其中对象为未必含么的交换  $C^*$  代数, 态射为到乘子代数的非退化同态, 这是说, 将每个非退化同态  $A \rightarrow M(B)$  看做从  $A$  到  $B$  的箭头, 其中  $M(B)$  上的拓扑是严格拓扑, 假设  $f: A \rightarrow M(B)$ ,  $g: B \rightarrow M(C)$ , 态射的复合为  $\bar{g} \circ f: A \rightarrow M(C)$ , 其中  $\bar{g}$  是上一定理中的延拓同态.

[1] 中定理 1 证明了  $C^*\text{Algebra}_{nd,m}$  确实是范畴.

已知含么  $C^*$  代数的乘子代数就是它自身, 所以  $M: C^*\text{Algebra}_{nd,m} \rightarrow C^*\text{Algebra}$  定义了一个函子.

**定理 48.** 上述函子  $M$  是遗忘函子  $F: C^*\text{Algebra} \rightarrow C^*\text{Algebra}_{nd,m}$  的右伴随, 即  $F \dashv M$ .

证明. 即要说明有自然双射

$$\text{Hom}_{C^*\text{Algebra}_{nd,m}}(F(A), B) \cong \text{Hom}_{C^*\text{Algebra}}(A, M(B)),$$

由  $C^*\text{Algebra}_{nd,m}$  中态射的定义可知,

$$\text{Hom}_{C^*\text{Algebra}_{nd,m}}(F(A), B) = \{\varphi: A \rightarrow M(B) : \varphi \text{ 是非退化同态}\},$$

又有

$$\text{Hom}_{C^*\text{Algebra}}(A, M(B)) = \{\psi: A \rightarrow M(B) : \psi(I_B) = I_{M(A)}\},$$

而因  $A$  含幺,  $A$  到  $M(B)$  的非退化同态显然等价于保幺, 故  $\text{Hom}_{C^*\text{Algebra}_{nd,m}}(F(A), B)$  与  $\text{Hom}_{C^*\text{Algebra}}(A, M(B))$  本质就是同一集合, 故  $F \dashv M$ .  $\square$

**定理 49.** 函子  $\sigma: C^*\text{Algebra}_{nd,m} \rightarrow \text{LCH}^{op}$  是范畴等价, 其拟逆是  $C_0: \text{LCH} \rightarrow C^*\text{Algebra}_{nd,m}^{op}$ .

证明见 [1] 定理 2.

由点集拓扑学可知以下定理.

**定理 50.** 斯通-切赫紧化函子  $\beta: \text{LCH} \rightarrow \text{CHaus}$  是遗忘函子  $F: \text{CHaus} \rightarrow \text{LCH}$  的左伴随, 即  $\beta \dashv F$ .

**定理 51** (有界函数). 局部紧豪斯多夫空间  $X$  上的所有有界连续函数组成的集合记为  $C_b(X)$ , 则  $C_b$  是从  $\text{LCH}$  到  $C^*\text{Algebra}$  的函子.

证明. 设  $X$  是局部紧豪斯多夫空间,  $C_b(X)$  上的运算按显然的方式定义, 范数为上确界范数, 由有界性知范数存在, 映到 1 的常值函数在  $C_b(X)$  内, 它是幺元, 对合按复共轭定义, 显然这使得  $C_b(X)$  成为一个  $C^*$  代数. 假设  $f: X \rightarrow Y$ , 则  $C_b(f)$  是拉回映射  $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ , 于是  $C_b$  显然是函子.  $\square$

**定理 52.** 设  $X$  是局部紧豪斯多夫空间, 则  $M(C_0(X)) \cong C_b(X) \cong C(\beta(X))$ .

证明见 [5] 定理 10.

于是显然有下图交换.

$$\begin{array}{ccc} C^*\text{Algebra}_{nd,m} & \xrightleftharpoons[\quad C_0 \quad]{\quad \sigma \quad} & \text{LCH}^{op} \\ \uparrow F \quad \downarrow M & \swarrow C_b & \uparrow F \quad \downarrow \beta \\ C^*\text{Algebra} & \xrightleftharpoons[\quad C \quad]{\quad \sigma \quad} & \text{CHaus}^{op} \end{array}$$

## 4 应用

### 4.1 傅里叶变换

假设  $G$  是局部紧豪斯多夫交换群 (此后默认必须豪斯多夫), 选定  $G$  上哈尔测度, 以  $L^1(G)$  记  $G$  上满足

$$\int_G |f(x)| dx < \infty$$

的复值可测函数的 (几乎处处相等的等价类) 集合, 范数取  $L^1$  范数

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)| \, dx,$$

乘法取卷积

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x) \, dy,$$

定义对合为

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})},$$

可以证明这使得  $L^1(G)$  成为一个未必含幺的  $*$ -巴拿赫代数.

以  $\widehat{G}$  记  $G$  的到  $\mathbb{T}$  (复平面中的单位圆群) 所有连续群同态组成的集合, 可以证明  $\widehat{G}$  也是局部紧交换群, 称为  $G$  的对偶群.

**定理 53.** 设  $G$  是局部紧交换群, 则有同胚  $\varphi: \widehat{G} \rightarrow \sigma(L^1(G))$ ,

$$\chi \mapsto \left[ f \mapsto \int_G f(x) \overline{\chi(x)} \, dx \right].$$

于是盖尔方德变换  $L^1(G) \rightarrow C_0(\sigma(L^1(G)))$  就可以写为  $L^1(G) \rightarrow C_0(\widehat{G})$ ,  $f \mapsto \widehat{f}$ , 对任意  $\chi \in \widehat{G}$ ,  $\widehat{f}(\chi) = \varphi(\chi)(f)$ , 于是

$$\widehat{f}(\chi) = \int_G f(x) \overline{\chi(x)} \, dx.$$

称  $f \mapsto \widehat{f}$  为傅里叶变换, 记为  $\mathfrak{F}(f) = \widehat{f}$ . 由盖尔方德理论立刻得到如下定理.

**定理 54.** 傅里叶变换  $\mathfrak{F}: L^1(G) \rightarrow C_0(\widehat{G})$  是  $*$ -同态, 并且其像在  $C_0(\widehat{G})$  中稠密.

## 4.2 Wiener 的 Tauber 型定理

**定理 55** (阿贝尔定理). 对于实数列  $\{a_n\}$ , 若

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A.$$

该定理的逆是不成立的, 例如

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{x+1},$$

当  $x \rightarrow 1^-$  时, 右边为  $\frac{1}{2}$ , 而左边  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  发散. 由此可见, 要想逆定理成立, 数列  $a_n$  必须满足某种条件.

**定理 56** (Tauber 定理). 对于实数列  $\{a_n\}$ , 若

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$$

且  $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

类似的还有积分形式.

**定理 57** (Tauber 型定理). 对于实函数  $f(x)$ , 若

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^{\infty} f(x) e^{-tx} dx = A$$

且  $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ , 则

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = A.$$

一般来说, 由一个函数的某个均值或加权均值的收敛性或某种渐进性质, 加上该函数的某种限制条件 (称为 Tauber 型条件), 推出该函数本身或其他一类加权均值的收敛性或某种渐进性质的定理, 称为 Tauber 型定理, 该名称由哈代和李特尔伍德命名, 其中最出名的即为 Wiener 的 Tauber 型定理, 因为由它可以推出素数定理. 对于这样一个硬分析的定理, 盖尔方德理论为其提供了一个软分析的证明. 我们这里叙述局部紧交换群上的版本, 它显然包含实数域  $\mathbb{R}$  上的原始版本.

$L^\infty(G)$  为  $G$  上的有界函数空间. 说在  $x \rightarrow \infty$  时  $G$  上的某个函数  $f(x) \rightarrow A$ , 指的是对任意正数  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $G$  的紧子集  $K$ , 使得  $|f(x) - A| < \varepsilon$  对任意  $x \in G - K$  都成立. 说函数  $f$  是缓慢震荡的, 指的是任意正数  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $G$  的紧子集  $K$  和 1 的邻域  $V$ , 使得  $|f(x) - f(y^{-1}x)| < \varepsilon$  对任意  $x \in G - K$  和  $y \in V$  都成立.

**定理 58** (Wiener-Pitt 定理). 设  $f \in L^\infty(G)$ ,  $\varphi \in L^1(G)$ ,  $\widehat{\varphi}$  在  $\widehat{G}$  上无零点, 并且满足

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f * \varphi(x) = A \int_G \varphi(t) dt,$$

则对任意的  $\psi \in L^1(G)$ , 都有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f * \psi(x) = A \int_G \psi(t) dt,$$

若假设  $f$  是缓慢震荡的, 则还有  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ .

证明很大程度上依赖  $L^1(G)$  的理想通过盖尔方德变换与  $\widehat{G}$  中子集的对应关系, 证明略复杂, 参见 [7] 第 4.5 节.

## 5 实情形

本节假设标量域均为实数域, 实情形没有复情形的性质那么好, 但仍有一些有趣的定理.

假设  $X$  是一个紧豪斯多夫空间, 定义  $C(X, \mathbb{R})$  为从  $X$  到  $\mathbb{R}$  的所有连续函数组成的集合, 与复情形同理, 它是一个含么且交换的实  $C^*$  代数, 现假设  $\sigma_{\mathbb{R}}(C(X, \mathbb{R}))$  是从  $C(X)$  到  $\mathbb{R}$  的所有非零代数同态组成的集合, 其上拓扑取弱\* 拓扑. 类似复情形, 仍可定义映射  $h_x: C(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_x(f) = f(x)$ .

**定理 59** (盖尔方德-柯尔莫哥洛夫定理). 对任意  $x \in X$ ,  $x \mapsto h_x$  是  $X$  与  $\sigma_{\mathbb{R}}(C(X, \mathbb{R}))$  之间的同胚.

证明思路与复情形完全相同, 甚至更简单.

而给定交换  $C^*$  代数  $A$ , 是否有  $C(\sigma_{\mathbb{R}}(A), \mathbb{R})$  与  $A$  同构呢, 答案是未必, 因为  $C(\sigma_{\mathbb{R}}(A), \mathbb{R})$  中的对合一定是平凡的, 而  $A$  中对合未必平凡, 即使忽略对合和范数也未必成立, 甚至  $\sigma_{\mathbb{R}}(A)$  本身都未必非空, 例如取  $A = \mathbb{C}$ , 这显然是一个  $\mathbb{R}$ -代数, 同态  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  必须满足

$$f(i)^2 = f(i^2) = f(-1) = -1,$$

而这在实数域是不可能的, 故  $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \emptyset$ .

于是自然的问题是, 怎样的实  $C^*$  代数才具有  $C(X, \mathbb{R})$  的形状, 这个问题的答案由斯通回答了 [20, 21], 具有这种性质的代数称为斯通环, 参见 [10] 第四章和 [3].

## 附录 A 巴拿赫空间中的解析函数

本节设  $G$  是复平面中区域,  $X$  是复巴拿赫空间,  $f: G \rightarrow X$ .

**定义 21** (强解析). 如果对  $G$  内每个点  $z$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

在范数拓扑下存在, 则称  $f$  在  $G$  内强解析.

**定义 22** (弱解析). 如果对  $X$  上的每个有界线性泛函  $l$ ,  $l(f(\cdot)): G \rightarrow \mathbb{C}$  是解析函数, 则称  $f$  在  $G$  内弱解析.

**定理 60** (Dunford 定理). 弱解析等价于强解析.

证明见 [11] 第 11 章定理 4, 于是强弱解析函数可一律称为解析函数.



## 附录 B Banach-Alaoglu 定理

**定理 61** (吉洪诺夫定理). 任意多个紧集的笛卡尔积在积拓扑下也是紧的.

该经典定理的证明见 [12] 第五章.

**定理 62** (Banach-Alaoglu 定理). 赋范线性空间  $X$  的对偶空间  $X^*$  中, 单位闭球

$$B = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$$

在弱\* 拓扑下是紧集.

证明. 对于每一个  $x \in X$ , 定义闭圆盘

$$D_x = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\},$$

它显然是紧集, 根据吉洪诺夫定理, 积空间

$$\Omega = \prod_{x \in X} D_x$$

在积拓扑下是一个紧豪斯多夫空间, 接下来我们证明可以将  $B$  嵌入  $\Omega$ , 子空间拓扑就是弱\* 拓扑, 并且  $B$  在  $\Omega$  内是一个闭子集, 进而紧.

对  $\forall f \in B$ , 由  $\|f\| \leq 1$  得  $|f(x)| \leq \|x\|$  对任意  $x \in X$  都成立, 即  $|f(x)| \in D_x$ , 再考虑  $\Omega$  中的元素无非就是映射  $g: X \rightarrow \bigcup D_x$  满足  $g(x) \in D_x$ , 所以通过改变  $B$  中元素的值域, 可以直接将  $B$  看做  $\Omega$  的子集. 而  $\Omega$  上的积拓扑就是逐点收敛拓扑, 因此在  $B$  上的子空间拓扑显然就是弱\* 拓扑, 现假设  $f \in \overline{B}$ , 设  $B$  中网  $f_\alpha \rightarrow f$ , 则对任意的  $x, y \in X$  和  $a, b \in \mathbb{C}$ , 有

$$f(ax + by) = \lim_{\alpha} f_{\alpha}(ax + by) = a \lim_{\alpha} f_{\alpha}(x) + b \lim_{\alpha} f_{\alpha}(y) = af(x) + bf(y),$$

即  $f$  是线性的, 从而  $f \in B$ , 故  $B$  是闭集, 进而紧. □

## 附录 C $C^*$ 代数与希尔伯特空间

在文献中, 有人将  $C^*$  代数称为  $B^*$  代数, 二者实际是不同含义但等价的定义.

设  $\mathcal{H} \in \text{Hil}$  是希尔伯特空间, 定义  $B(\mathcal{H})$  为从  $\mathcal{H}$  到  $\mathcal{H}$  的所有有界线性算子组成的集合, 算子间的加法和数乘按显然的方式定义, 乘积按算子的复合定义, 范数取算子范数, 至于对合, 设  $T \in B(\mathcal{H})$ , 则  $x \mapsto (Tx, y)$  对任意  $y \in \mathcal{H}$  都是一个线性泛函, 由里斯表示定理知存在  $y' \in \mathcal{H}$  使得  $(Tx, y) = (x, y')$ , 定义  $T^*: y \mapsto y'$  为  $T$  的伴随算子, 这使得  $B(\mathcal{H})$  成为了一个含么的  $C^*$  代数, 么元为恒等算子  $\text{id}_{\mathcal{H}}$ .

**定义 23** ( $*$ -表示). 设  $A$  是无么巴拿赫  $*$ -代数, 若有  $*$ -同态  $\pi: A \rightarrow B(\mathcal{H})$ , 则称  $\pi$  是  $A$  在  $\mathcal{H}$  中的一个  $*$ -表示.

若  $\pi$  是单射, 则称它是忠实的, 显然忠实表示一定是等距.

若  $\mathcal{H}$  有子空间  $\mathcal{H}_1$ , 使得  $\pi(X)(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{H}_1$ , 则称  $\mathcal{H}_1$  是表示  $\pi$  的不变子空间, 如果  $\pi$  的闭不变子空间只有  $\mathcal{H}$  和  $\{0\}$ , 则称  $\pi$  是不可约的, 否则就是可约的.

**定理 63** (盖尔方德-奈马克-西格尔表示定理). 任意一个无么  $C^*$  代数都等距  $*$ -同构于某个希尔伯特空间的有界算子代数的闭子代数, 即每个无么  $C^*$  代数都存在忠实表示.

证明. 含么情形的证明见 [17] 第 12 章倒数第二节. 若  $A$  无么, 则  $A$  在其单位化  $\tilde{A}$  内是极大理想, 进而闭, 所以  $\tilde{A}$  的忠实表示限制在  $A$  上就是  $A$  的一个忠实表示.  $\square$

由该定理知,  $C^*$  代数中的  $C$  的含义可能指闭 (close) 的 [18]. 而  $B^*$  代数中的  $B$  可能指巴拿赫 (Banach). 现代已很少使用  $B^*$  代数这个术语.

**定义 24** (紧算子代数). 对有界算子  $T \in B(\mathcal{H})$ , 若  $\mathcal{H}$  中单位开球的像的闭包在  $\mathcal{H}$  中紧, 则称  $T$  是一个紧算子, 所有紧算子组成  $B(\mathcal{H})$  的一个  $C^*$  子代数, 称为紧算子代数, 记为  $K(\mathcal{H})$ .

**定义 25** (Calkin 代数).  $B(\mathcal{H})/K(\mathcal{H})$  称为 Calkin 代数.

可以证明  $M(K(\mathcal{H})) = B(\mathcal{H})$ , 于是对任意  $C^*$  代数  $A$ , 定义其所谓的 Corona 代数  $M(A)/A$  可以被看做 Calkin 代数的推广.

**定义 26** (弗雷德霍姆算子). 若算子  $T \in B(\mathcal{H})$  的像是闭集, 并且其核  $\ker T$  和余核  $\operatorname{coker} T$  都是有限维的, 则称  $T$  是一个弗雷德霍姆算子, 所有弗雷德霍姆算子组成的集合记为  $F(\mathcal{H})$ .

**定理 64** (Atkinson 定理). 假设  $\pi: B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})/K(\mathcal{H})$  是商映射, 则  $T$  是弗雷德霍姆算子当且仅当  $\pi(T)$  在卡尔金代数内可逆.

**定义 27** (指标). 设  $T$  是弗雷德霍姆算子, 定义其指标为

$$\operatorname{ind} T = \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T.$$

## 附录 D 群 $C^*$ 代数

假设  $G$  是局部紧豪斯多夫群 (此后默认必须豪斯多夫), 选定  $G$  上左哈尔测度, 以  $L^1(G)$  记  $G$  上满足

$$\int_G |f(x)| dx < \infty$$

的复值可测函数的 (几乎处处相等的等价类) 集合, 范数取  $L^1$  范数

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)| dx,$$

乘法取卷积

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x) dy,$$

设  $G$  的模函数为  $\Delta$ , 定义对合为

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})} \Delta(x^{-1}),$$

可以证明这使得  $L^1(G)$  成为一个  $*$ -巴拿赫代数, 称为  $G$  的  $L^1$  群代数.

**定义 28** (酉算子). 设  $\mathcal{H}$  是希尔伯特空间,  $U \in B(\mathcal{H})$ , 若满足

$$U^*U = UU^* = \text{id}_{\mathcal{H}},$$

则称  $U$  是一个酉算子,  $\mathcal{H}$  的所有酉算子组成的群记为  $U(\mathcal{H})$ .

**定义 29** (酉表示). 设  $G$  是一个局部紧群, 若有连续的群同态  $\pi: G \rightarrow U(\mathcal{H})$ , 其中  $U(\mathcal{H})$  带强算子拓扑, 则称  $\pi$  是  $A$  在  $\mathcal{H}$  中的一个酉表示.

若  $\mathcal{H}$  有子空间  $\mathcal{H}_1$ , 使得  $\pi(g)(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{H}_1$ , 则称  $\mathcal{H}_1$  是表示  $\pi$  的不变子空间, 如果  $\pi$  的闭不变子空间只有  $\mathcal{H}$  和  $\{0\}$ , 则称  $\pi$  是不可约的, 否则就是可约的.

**定义 30** (酉等价). 设  $\pi_1: G \rightarrow U(\mathcal{H}_1)$  和  $\pi_2: G \rightarrow U(\mathcal{H}_2)$  是群  $G$  在两个希尔伯特空间  $\mathcal{H}_1$  和  $\mathcal{H}_2$  上的酉表示, 若存在酉算子  $U: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ , 使得对任意  $g \in G$ , 有

$$\pi_2(g) = U\pi_1(g)U^{-1} = U\pi_1(g)U^*,$$

则称表示  $\pi_1$  与  $\pi_2$  是酉等价的.

$G$  的酉表示  $\pi$  所属的等价类记为  $[\pi]$ , 所有酉表示等价类组成的集合记为  $\widehat{G}$ , 称为  $G$  的对偶空间, 注意  $\widehat{G}$  未必是群.

当  $G$  交换时,  $\widehat{G}$  即为  $G$  的对偶群.

**定理 65.** 局部紧群  $G$  的所有不可约酉表示与  $L^1(G)$  的所有非退化不可约  $*$ -表示之间有一个一一对应, 设酉表示  $\pi$  对应  $*$ -表示  $\Pi$ , 则有以下博赫纳积分等式,

$$\Pi(f) = \int_G f(x)\pi(x) dx.$$

**定义 31** (群  $C^*$  代数). 设  $f \in L^1(G)$ , 定义

$$\|f\|_* = \sup_{[\pi] \in \widehat{G}} \|\Pi(f)\|,$$

其中  $\Pi$  为上一定理中  $\pi$  对应的  $*$ -表示, 可以证明  $\|\cdot\|_*$  是范数, 且与  $L^1(G)$  中的对合结构相容, 并且满足  $C^*$  条件

$$\|f^*f\|_* = \|f\|_*^2,$$

但  $\|\cdot\|_*$  不完备, 我们取  $L^1(G)$  关于  $\|\cdot\|_*$  的完备化, 记为  $C^*(G)$ , 称为  $G$  的群  $C^*$  代数.

每一个  $*$ -表示都能唯一的延拓到群  $C^*$  代数上, 群  $C^*$  代数的  $*$ -表示限制到  $L^1(G)$  仍是  $*$ -表示.

**定理 66.** 假设  $G$  是一个局部紧交换群, 则  $\|f\|_* = \|\widehat{f}\|_\infty$ ,  $C^*(G) \cong C_0(\sigma(C^*(G))) \cong C_0(\widehat{G})$ , 其中  $\widehat{f}$  为  $f$  的傅里叶变换或盖尔方德变换.

显然当  $\pi_1$  与  $\pi_2$  等价时, 易知有  $\ker \Pi_1 = \ker \Pi_2$ , 我们记

$$\text{Prim}(G) = \{\ker \Pi : [\pi] \in \widehat{G}\},$$

其中元素称为本原理想 (可以证明它们确实是理想), 对于任意子集  $S \subseteq \text{Prim}(G)$ , 定义其闭包为

$$\overline{S} = \left\{ \mathfrak{m} : \bigcap_{\mathfrak{i} \in S} \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{m} \right\},$$

定义  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ , 容易验证这满足闭包公理, 它诱导出  $\text{Prim}(G)$  上的一个拓扑, 称为雅各布森拓扑或 hull-kernel 拓扑.

**定义 32** (Fell 拓扑). 对局部紧群  $G$ , 映射  $\ker: \widehat{G} \rightarrow \text{Prim}(G)$  显然是良定的满射, 它将  $\text{Prim}(G)$  上的雅各布森拓扑拉回到  $\widehat{G}$  上, 称为  $\widehat{G}$  上的 Fell 拓扑.

**定理 67.** 当  $G$  交换时, Fell 拓扑是局部紧的, 它就是对偶群  $\widehat{G}$  上的通常拓扑. 当  $G$  紧时, Fell 拓扑就是离散拓扑.

本节的参考文献见 [7] 第三章及第七章.

## 附录 E $K$ 理论

虽然与盖尔方德对偶几乎无关, 但  $C^*$  代数作为拓扑  $K$  理论, 代数  $K$  理论以及解析  $K$  理论之间的交汇点, 也体现了代数与拓扑之间的对应关系.

**定义 33** (格罗滕迪克群). 设  $(M, +)$  为交换幺半群, 定义  $M \times M$  上的等价关系

$$(x, y) \sim (x', y') \iff \exists z \in M, x + y' + z = x' + y + z,$$

取商集

$$K(M) = (M \times M) / \sim,$$

含  $(x, y)$  的等价类记为  $[x, y]$ , 并在  $K(M)$  上定义二元运算  $[x, y] + [x', y'] = [x + x', y + y']$ , 则  $(K(M), +)$  构成交换群,  $x \mapsto [x, 0]$  给出同态  $M \rightarrow K(M)$ , 并且具有泛性质, 对任意交换群  $(A, +)$  和幺半群同态  $f: M \rightarrow A$ , 存在唯一的  $\psi: K(M) \rightarrow A$  使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & K(M) \\ & \searrow f & \downarrow \psi \\ & & A \end{array}$$

称  $K(M)$  为  $M$  给出的格罗滕迪克群.

格罗滕迪克群良定性的证明见 [26] 定理 4.2.12.

假设交换群范畴为  $\mathbf{Ab}$ , 交换幺半群范畴为  $\mathbf{CMon}$ , 则由泛性质可知  $K: \mathbf{CMon} \rightarrow \mathbf{Ab}$  是函子, 并且显然与遗忘函子伴随.

假设  $\mathbf{A}$  是加性范畴, 其中对象的内同构类组成集合而非真类 (即骨架是小范畴), 它关于直和组成交换幺半群, 则可以对它定义  $K$  群, 得到  $K(\mathbf{A})$ . 注意, 对所谓的正合范畴也有  $K$  群的构造, 如果一个范畴同时是加性范畴和正合范畴, 得到的两种  $K$  群可能是不同的, 参见 [24] 第二章第 7 节.

## E.1 代数 $K$ 理论

本节中我们默认环一定含幺, 但未必可交换. 本节的参考文献是 [28].

**定义 34** (有限生成模). 设  $R$  是一个环,  $M$  是一个左  $R$ -模, 若存在有限多个元素  $m_1, \dots, m_n \in M$ , 使得  $M$  中每个元素都可以表示为  $\sum_{i=1}^n r_i m_i$  的形式, 其中  $r_i \in R$ , 则称  $M$  是一个有限生成模,  $m_1, \dots, m_n$  称为  $M$  的生成元.

**定义 35** (投射模). 设  $R$  是一个环,  $P$  是一个左  $R$ -模, 若以下几种等价条件满足任一, 则称  $P$  是一个投射模:

- 对任意的  $R$ -模  $M$  和  $N$ , 任意的  $R$ -模同态  $f: P \rightarrow M$  和任意的  $R$ -模满同态  $g: N \rightarrow M$ , 都存在  $R$ -模同态  $h: P \rightarrow N$ , 使得下图交换;

$$\begin{array}{ccc}
 P & & \\
 \downarrow h & \searrow f & \\
 N & \xrightarrow{g} & M \longrightarrow 0
 \end{array}$$

- $\text{Hom}$  函子  $\text{Hom}_{R-\text{Mod}}(P, \cdot)$  保正合;
- 任一正合列  $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$  皆分裂;
- 存在左  $R$ -模  $Q$  使得  $P \oplus Q \cong F$  为自由模, 这时我们称  $P$  是自由模的直和项.

这几个条件的等价性参见 [28] 定理 6.8.

**定理 68.** 设  $P$  和  $P'$  是有限生成投射模, 则  $P \oplus P'$  也是有限生成投射模.

证明. 先证  $P \oplus P'$  有限生成, 假设  $P$  的生成元为  $p_1, \dots, p_n$ ,  $P'$  的生成元为  $p'_1, \dots, p'_m$ , 显然  $(p_1, 0), \dots, (p_n, 0), (0, p'_1), \dots, (0, p'_m)$  是  $P \oplus P'$  的生成元.

假设  $P \oplus Q \cong R^n$ ,  $P' \oplus Q' \cong R^m$ , 则由直和的结合和交换约束知  $P \oplus Q \oplus P' \oplus Q' \cong (P \oplus P') \oplus (Q \oplus Q') \cong R^{n+m}$ , 于是  $P \oplus P'$  也投射.  $\square$

由于有限生成自由模的同构类个数至多可数, 而有限生成投射模一定是有限生成自由模的子模, 因此有限生成投射  $R$ -模的同构类组成的确实是集合, 记为  $\mathcal{P}(R)$ , 以  $[P]$  记含  $P$  的同构类. 我们以  $\text{Proj}(R)$  记所有有限生成投射  $R$ -模组成的范畴. 在  $\mathcal{P}(R)$  上定义加法  $[P] + [Q] = [P \oplus Q]$ , 由上一定理知加法良定, 并且使得  $\mathcal{P}(R)$  构成一个么半群, 么元为零模的同构类  $[0]$ .

**定义 36** (代数  $K_0$  群). 设  $R$  是一个环,  $R$  的代数  $K_0$  群定义为  $\mathcal{P}(R)$  的格罗滕迪克群, 即  $K_0^{\text{alg}}(R) = K(\mathcal{P}(R))$ , 无混淆时上标  $\text{alg}$  可省略.

代数  $K_0$  群还有另一种定义方式, 设  $\mathcal{F}$  为以  $\mathcal{P}(R)$  为生成元的自由群, 再定义  $\mathcal{R}$  为以

$$\{[P'] + [P''] - [P] : P, P', P'' \in \text{Ob}(\text{Proj}(R)), 0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0 \text{ 正合}\}$$

为生成元的子群, 定义  $K_0(R) = \mathcal{F}/\mathcal{R}$ . 由于投射模的短正合列必分裂, 即有  $P \cong P' \oplus P''$ , 则在  $K_0(R)$  里有  $[P] = [P'] + [P''] = [P \oplus P'']$ , 显然两种定义等价. 本质而言, 第一种定义是使用加性范畴结构定义的, 第二种定义是使用正合范畴结构定义的, 此时恰好相同.

可以证明  $K_0: \text{Ring} \rightarrow \text{Ab}$  是函子. 高阶代数  $K$  群的定义比较复杂, 参见 [28].

最后我们叙述塞尔的一个定理, 它是一切  $K$  理论的思想源泉, 原始资料见 [19] 第 50 节, 这里我们以更现代的概形语言叙述, 参考自 [24] 第一章.

**定义 37** (局部自由层). 设  $(X, \mathcal{O}_X)$  是环化空间,  $\mathcal{F}$  是  $\mathcal{O}_X$ -模层, 若  $\mathcal{F}$  同构于  $\mathcal{O}_X$  与自身的若干次直和, 则称  $\mathcal{F}$  是一个自由  $\mathcal{O}_X$ -模层, 简称自由层. 若  $X$  有开覆盖  $\{U_\alpha\}$  使得诸  $\mathcal{F}|_{U_\alpha}$  都是自由  $\mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$ -模层, 则称  $\mathcal{F}$  是局部自由层.

注意定义中的若干次直和并未要求有限或无限, 在子集  $U_\kappa$  处的直和次数称为  $\mathcal{F}$  在  $U_\kappa$  处的秩, 若在各  $U_\kappa$  上的秩均相同, 则称其为  $\mathcal{F}$  的秩, 可以证明秩在  $X$  的每个连通分支上都是相同的.

在概形上, 有限秩的局部自由层扮演了向量丛的角色, 而概形上的向量丛也有另一种显得更几何的定义, 参见 [8] 第二章习题 5.18. 这种观点在解析空间 (或复流形) 上则成为塞尔的 GAGA 原理的一部分.

**定义 38** (向量丛). 设  $(X, \mathcal{O}_X)$  是环化空间, 其上的有限秩局部自由层称为  $X$  上的一个向量丛, 注意这里我们不要求秩全局相等, 只需在各连通分支上都有有限即可.

我们以  $\text{Vect}(X)$  记环化空间  $(X, \mathcal{O}_X)$  上的向量丛范畴, 它关于层直和构成一个加性范畴.

现设  $X = \text{Spec}(R)$  为仿射概形. 设  $M$  是一个  $R$ -模, 我们由此定义出一个层. 对每一点  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ , 记  $M_{\mathfrak{p}}$  为  $M$  在  $\mathfrak{p}$  处的局部化, 对  $\text{Spec}(R)$  的任意开子集  $U$ , 定义

$$\widetilde{M}(U) = \{s: U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}} : s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}\},$$

这显然是交换群, 可以证明  $\widetilde{M}$  是一个  $\mathcal{O}_X$ -模层, 其中  $\mathcal{O}_X$  为概形  $\text{Spec}(R)$  的结构层.

反过来, 若  $\mathcal{F}$  是  $\mathcal{O}_X$ -模层, 则全局截面  $\mathcal{F}(X)$  当然是一个  $R$ -模.

以  $\text{QCoh}(X)$  记概形  $X$  上的拟凝聚层范畴, 我们以  $R\text{-Mod}$  记  $R$ -模范畴,  $\text{Proj}(R)$  为有限生成投射  $R$ -模范畴. [8] 第二章 5.5 表明,  $X = \text{Spec}(R)$  为仿射概形时,  $\text{QCoh}(X)$  与  $R\text{-Mod}$  范畴等价, 在此基础上, 有以下塞尔定理.

**定理 69** (塞尔定理). 设  $X = \text{Spec}(R)$  为仿射概形, 则函子  $M \rightarrow \widetilde{M}$  是从  $\text{Proj}(R)$  到  $\text{Vect}(X)$  的范畴等价, 其拟逆函子为  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(X)$ .

由此可以引申出概形的  $K$  理论.

**定义 39** (概形  $K_0$  群). 设  $(X, \mathcal{O}_X)$  是概形, 以  $\mathcal{F}$  记以  $X$  的有限秩局部自由层的同构类为生成元生成的自由群, 以  $\mathcal{R}$  记以

$$\{[\mathcal{F}'] + [\mathcal{F}'' ] - [\mathcal{F}] : \mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{F}'' \in \text{Ob}(\text{Vect}(X)), 0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \text{ 正合}\}$$

生成的子群, 定义  $K_0(X) = \mathcal{F}/\mathcal{R}$ .

这里的定义依赖  $\text{Vect}(X)$  的正合范畴结构, 而不是加性范畴结构, 若按照直和么半群的格罗滕迪克群定义, 可能与这里的定义不同构, 除非  $X$  是仿射概形, 参见 [24] 第二章第 7 节.

**定理 70.** 设  $X = \text{Spec}(R)$  为仿射概形, 则  $K_0(X) \cong K_0(R)$ .

## E.2 拓扑 K 理论

拓扑 K 理论是通过塞尔定理将代数 K 理论类比到拓扑空间上的, 本节的参考文献是 [2, 23, 27].

设标量环  $\mathbb{K}$  为实数域  $\mathbb{R}$  或复数域  $\mathbb{C}$  或四元数除环  $\mathbb{H}$  (其上拓扑即为  $\mathbb{R}^4$  的标准拓扑).

**定义 40** (向量丛). 设  $E$  和  $X$  为拓扑空间,  $\pi: E \rightarrow X$  为连续满射, 要求  $\pi^{-1}(x)$  对每个  $x \in X$  都存在有限维线性空间结构, 其上继承自  $E$  的子空间拓扑与线性结构相容, 并且对每个  $x \in X$ , 都存在  $x$  的邻域  $U_x$  和非负整数  $n$ , 有同胚

$$\psi_x: \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times \mathbb{K}^n,$$

满足限制映射  $\psi_x|_{\pi^{-1}(x)}: \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^n$  是线性同构, 则称  $E$  为  $X$  上的向量丛, 称  $\pi$  为丛投影, 称  $\pi^{-1}(x) = E_x$  为  $x$  上的纤维, 称  $n$  为  $x$  处的秩, 若所有  $x$  处的秩都相等, 则称  $E$  的秩为  $n$ .

这个定义看起来比一些几何书中的定义弱一些, 但实际上两种定义是等价的. 注意我们并没有要求秩是唯一的, 但可以证明该定义保证了在单个连通分支内秩一定唯一, 而不同连通分支上的秩可以不同. 称形如  $X \times \mathbb{K}^n$  的向量丛为平凡丛, 其中丛投影为到第一分量的投影映射.

设  $E$  和  $F$  是  $X$  上的向量丛, 从  $E$  到  $F$  的一个丛同态指的是连续映射  $f: E \rightarrow F$ , 满足  $\pi_E = \pi_F \circ f$ , 并且对每个  $x \in X$ ,  $f_x: E_x \rightarrow F_x$  是线性映射. 若  $f$  是同胚, 则说  $E$  与  $F$  同构.

符号如上, 定义两个向量丛的直和  $E \oplus F$  为

$$E \oplus F = \{(u, v) \in E \times F : \pi_E(u) = \pi_F(v)\},$$

$$\pi_E \oplus \pi_F: E \oplus F \rightarrow X, \quad (u, v) \mapsto \pi_E(u) = \pi_F(v),$$

$E \oplus F$  上的拓扑为  $E \times F$  的子空间拓扑, 易证这确实是  $X$  上的一个向量丛, 并且  $(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$  作为向量空间的直和.

我们以  $\mathbf{Vect}(X)$  记  $X$  上所有向量丛组成的范畴, 显然它是范畴, 并且还是加性范畴. 以  $V(X)$  记  $X$  上所有向量丛的同构类组成的集合, 可以证明它确实是集合 (等价于从  $X$  到无穷格拉斯曼簇的同伦等价类). 以  $[E]$  表示  $E$  所在的同构类, 在  $V(X)$  上定义加法为  $[E] + [F] = [E \oplus F]$ , 它显然使  $V(X)$  成为一个交换幺半群, 幺元为零丛  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  所在的同构类, 记为  $[0]$ .

现设  $f: Y \rightarrow X$  是连续映射,  $E$  是  $X$  上的向量丛, 我们定义  $Y$  上的拉回丛为

$$f^*E = \{(y, u) \in Y \times E : f(y) = \pi(u)\},$$

$\pi_Y$  定义为第一分量的投影  $\pi_Y: f^*E \rightarrow Y$ ,  $(y, u) \mapsto y$ , 容易验证这确实是  $Y$  上的向量丛. 这样得到的  $f^*$  显然是函子  $\mathbf{Vect}(X) \rightarrow \mathbf{Vect}(Y)$ , 而在等价类上, 这又说明  $V: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CMon}^{op}$  是函子.



**定义 41** (拓扑  $K^0$  群). 设  $X$  是紧豪斯多夫空间, 定义  $K_{top}^0(X)$  为  $V(X)$  的格罗滕迪克群  $K(V(X))$ , 称为  $X$  的拓扑  $K^0$  群, 无混淆时下标  $top$  可省略.

显然  $K^0: \mathbf{CHaus} \rightarrow \mathbf{Ab}^{op}$  是函子.

若  $X$  是局部紧豪斯多夫空间, 定义  $K^0(X) = K^0(X \sqcup \{\bullet\})/\mathbb{Z}$ , 其中  $X \sqcup \{\bullet\}$  是单点紧化. 现设  $X$  已经是紧的, 则它的单点紧化就是无交并一个单点, 而单点上的向量丛只有平凡丛, 故  $V(\bullet) \cong \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $K^0(\bullet) = \mathbb{Z}$ , 显然有  $K^0(X \sqcup \{\bullet\}) = K^0(X) \oplus \mathbb{Z}$ , 而  $K^0(X) = (K^0(X) \oplus \mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ , 与此前对紧豪斯多夫空间的定义相符.

当  $X$  非空时, 定义所谓的约化  $K^0$  群为  $\widetilde{K}^0(X) = K^0(X)/\mathbb{Z}$ . 这个商群总是存在的, 因为  $X$  非空, 假设  $x \in X$ , 则有满射  $p: X \rightarrow \{x\}$  和单射  $\iota: \{x\} \rightarrow X$  满足  $p \circ \iota = \text{id}$ , 它们诱导映射  $p^*: K^0(\{x\}) \rightarrow K^0(X)$  和  $\iota^*: K^0(X) \rightarrow K^0(\{x\})$  满足  $\iota^* p^* = \text{id}^*$ , 而先前已经说明  $K^0(\{x\}) \cong \mathbb{Z}$ , 于是  $\mathbb{Z}$  通过  $p^*$  嵌入  $K^0(X)$ , 商群  $K^0(X)/\mathbb{Z}$  存在, 并且有正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow K^0(X) \longrightarrow \widetilde{K}^0(X) \longrightarrow 0$$

分裂, 即  $K^0(X) \cong \widetilde{K}^0(X) \oplus \mathbb{Z}$ .

$K^0$  群和约化  $K^0$  群是同伦不变量, 即有如下定理.

**定理 71.** 设  $X$  和  $Y$  是局部紧豪斯多夫空间,  $f, g: X \rightarrow Y$ , 并且  $f$  与  $g$  同伦, 则  $f^* = g^*$ .

直接的推论是, 同伦等价的局部紧豪斯多夫空间具有同构的  $K^0$  群, 将该定理应用到同伦等价映射的复合与恒等映射即可.

**定义 42** (截面). 设  $E$  是  $X$  上的向量丛, 定义  $E$  的一个截面为  $X$  到  $E$  的连续映射  $s: X \rightarrow E$ , 满足  $\pi \circ s = \text{id}_X$ , 即  $s(x) \in E_x$  对任意  $x \in X$  都成立, 所有截面组成的集合记为  $\Gamma_X(E)$ , 无混淆时下标可省略不写.

设  $X$  是紧豪斯多夫空间, 因为  $E_x$  是线性空间, 则存在零截面  $0: X \rightarrow E$ ,  $x \mapsto 0_x$ , 其中  $0_x$  是  $E_x$  中的零向量, 对于任意的截面  $s, t \in \Gamma(E)$ , 定义  $s + t$  为纤维上的逐点加法, 即

$$(s + t)(x) = s(x) + t(x),$$

显然这使得  $\Gamma(E)$  成为一个加法交换群. 现设  $C_{\mathbb{K}}(X)$  为  $X$  到  $\mathbb{K}$  的所有连续函数组成的环, 对于任意的  $f \in C_{\mathbb{K}}(X)$  和  $s \in \Gamma(E)$ , 定义

$$(f \cdot s)(x) = f(x) \cdot s(x),$$

这使得  $\Gamma(E)$  成为一个  $C_{\mathbb{K}}(X)$ -模, 可以证明该模一定是有限生成投射模.

**定理 72** (Serre-Swan 定理). 设  $X$  是紧豪斯多夫空间, 则  $\Gamma: \mathbf{Vect}(X) \rightarrow \mathbf{Proj}(C_{\mathbb{K}}(X))$  是范畴等价.

Swan 的原始论文见 [22]. 现说明如何将有限生成投射模变成向量丛, 设  $P$  是一个有限生成投射  $C_{\mathbb{K}}(X)$ -模, 则一定存在自然数  $n$  和模  $Q$  使得  $P \oplus Q \cong C_{\mathbb{K}}(X)^n$ , 设  $e: C_{\mathbb{K}}(X)^n \rightarrow P$  是投影映射, 则  $e$  可以看做  $M_n(C_{\mathbb{K}}(X))$  中的一个矩阵, 其像同构于  $P$ , 又因为  $M_n(C_{\mathbb{K}}(X)) \cong C_{\mathbb{K}}(X, M_n(\mathbb{K}))$ , 则对任意  $x \in X$ ,  $e(x)$  是  $M_n(\mathbb{K})$  中的一个矩阵, 我们定义

$$E = \{(x, v) \in X \times \mathbb{K}^n : v \in e(x)(\mathbb{K}^n)\},$$

可以验证这确实是  $X$  上的一个向量丛, 且  $\Gamma(E) \cong P$ . 详细的证明见参考文献.

直接的推论是群同构  $K_0^{alg}(C_{\mathbb{K}}(X)) \cong K_{top}^0(X)$ , 而当  $X$  是局部紧豪斯多夫空间时, 由无么盖尔方德理论也可直接得到  $K_0^{alg}(C(X \sqcup \{\bullet\})) \cong K_0^{alg}(\widehat{C_{0,\mathbb{K}}(X)}) \cong K_{top}^0(X) \oplus \mathbb{Z}$ , 其中  $C_{0,\mathbb{K}}(X)$  为  $X$  到  $\mathbb{K}$  的在无穷远点消失的连续函数组成的环.

假设  $(X, x)$  和  $(Y, y)$  是两个带有基点的局部紧豪斯多夫空间. 定义

$$X \vee Y = (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y),$$

$$X \wedge Y = (X \times Y) / (X \vee Y),$$

可以证明  $\wedge$  是结合的.

**定义 43** (约化悬挂). 设  $(X, x)$  是带基点的紧豪斯多夫空间, 定义  $X$  的约化悬挂为

$$SX = S^1 \wedge X,$$

其中  $S^1$  是单位圆, 其基点约定为 1. 容易验证  $S^n = S^1 \wedge S^{n-1}$  对任意  $n \geq 1$  都成立, 因此我们可以约定  $X$  的  $n$  次约化悬挂为  $S^n X = S^n \wedge X$ .

以  $I$  记闭区间  $[0, 1]$ , 回忆  $X$  的悬挂为  $\Sigma X = ((X \times I) / (X \times \{0\}) / (X \times \{1\}))$ , 约化悬挂即为  $\Sigma X / (\{x\} \times I)$ , 其中  $x$  为基点. 显然,  $X$  紧时,  $\Sigma X / \{N, S\} \cong S(X \sqcup \{\bullet\})$ , 其中  $N, S$  分别表示悬挂的上下两极点. 此外, 显然约化悬挂空间也是紧的.

**定义 44** (高阶  $K$  群). 设  $X$  是局部紧豪斯多夫空间, 定义  $X$  的  $n$  阶  $K$  群为

$$K^{-n}(X) = K^0(S^n(X \sqcup \{\bullet\})) / \mathbb{Z},$$

若  $X$  是紧的, 定义其  $n$  阶约化  $K$  群为

$$\widetilde{K}^{-n}(X) = \widetilde{K}^0(S^n X).$$

还有一种定义是, 设  $X$  是紧豪斯多夫空间, 定义  $X$  的  $n$  阶  $K$  群为

$$K^{-n}(X) = K^0(X \times \mathbb{R}^n),$$

显然  $X \times \mathbb{R}^n$  不是紧的, 其单点紧化同胚于  $S^n(X \sqcup \{\bullet\})$ , 于是  $K^0(X \times \mathbb{R}^n) \cong K^0(S^n(X \sqcup \{\bullet\})) / \mathbb{Z}$ , 所以两种定义等价.

**定理 73** (Bott 周期律). 设  $X$  是局部紧豪斯多夫空间, 标量环为  $\mathbb{C}$  时, 有同构

$$K_{\mathbb{C}}^{-n-2}(X) \cong K_{\mathbb{C}}^{-n}(X),$$

标量环为  $\mathbb{R}$  或  $\mathbb{H}$  时, 有同构

$$K_{\mathbb{R}}^{-n-8}(X) \cong K_{\mathbb{R}}^{-n}(X), \quad K_{\mathbb{H}}^{-n-8}(X) \cong K_{\mathbb{H}}^{-n}(X),$$

并且  $K_{\mathbb{H}}^0(X) \cong K_{\mathbb{R}}^{-4}(X)$ .

可以证明, 对复数域  $\mathbb{C}$  和四元数代数  $\mathbb{H}$ , 都有  $K^{-1}(X) \cong \widetilde{K}^{-1}(X)$  对任意紧豪斯多夫空间  $X$  成立.

最后叙述一个 Serre-Swan 定理的光滑版本, 证明见 [13] 第 11 章.

**定理 74.** 设  $M$  是一个光滑实流形, 则  $M$  上光滑向量丛范畴  $\mathbf{SVect}(M)$  与有限生成投射  $C^\infty(M)$ -模组成的范畴  $\mathbf{Proj}(C^\infty(M))$  等价.

### E.3 解析 $K$ 理论

解析  $K$  理论也叫算子  $K$  理论, 它可以看做拓扑  $K$  理论的非交换推广. 本节主要的参考文献是 [23, 27].

本节仅考虑标量域为复数域  $\mathbb{C}$ ,  $C^*$  代数未必交换, 也未必含幺, 即在范畴  $C^*\mathbf{Algebra}$  上工作. 我们仍以  $\widetilde{A}$  表示  $A$  的单位化, 当  $A$  已经含幺时,  $\widetilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$ . 我们以  $M_n(A)$  表示以  $A$  为元素的  $n \times n$  矩阵代数, 以  $\mathrm{GL}_n(A)$  表示其一般线性群,  $\mathrm{U}_n(A)$  表示其酉群.

在  $M_n(A)$  上, 定义对合为

$$(a_{ij})_{n \times n}^* = (a_{ji}^*)_{n \times n},$$

即逐元素取对合并转置. 假设  $A$  是  $B(\mathcal{H})$  的子代数 (盖尔方德-奈马克西格尔表示定理), 则  $M_n(A)$  可以看做  $B(\mathcal{H}^{\oplus n})$  的子代数, 其范数为算子范数

$$\|(a_{ij})_{n \times n}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \left( \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right) \right\| : (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}^{\oplus n} \Big\},$$

显然它确实使得  $M_n(A)$  成为一个  $C^*$  代数.

**定义 45.** 设  $\pi: \widetilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$  是标准投影同态, 它诱导矩阵代数之间的同态  $\widetilde{\pi}: M_n(\widetilde{A}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ , 定义

$$\mathrm{GL}_n^+(A) = \{a \in \mathrm{GL}_n(\widetilde{A}) : \widetilde{\pi}(a) = 1_{n \times n}\},$$

$$\mathrm{U}_n^+(A) = \{a \in \mathrm{U}_n(\widetilde{A}) : \widetilde{\pi}(a) = 1_{n \times n}\}.$$

容易验证  $\mathrm{GL}_n^+(A)$  和  $\mathrm{U}_n^+(A)$  分别是  $\mathrm{GL}_n(\tilde{A})$  和  $\mathrm{U}_n(\tilde{A})$  的子群, 带子空间拓扑.

设  $a \in \mathrm{GL}_n^+(A)$ , 则分块矩阵  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1_{\tilde{A}} \end{pmatrix}$  是  $\mathrm{GL}_{n+1}^+(A)$  中元素, 这样得到一个嵌入映射  $\mathrm{GL}_n^+(A) \rightarrow \mathrm{GL}_{n+1}^+(A)$ , 以及嵌入映射列

$$\mathrm{GL}_1^+(A) \rightarrow \mathrm{GL}_2^+(A) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathrm{GL}_n^+(A) \rightarrow \cdots,$$

类似的也有嵌入映射列

$$\mathrm{U}_1^+(A) \rightarrow \mathrm{U}_2^+(A) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathrm{U}_n^+(A) \rightarrow \cdots,$$

再设  $a \in M_n(A)$ , 则分块矩阵  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0_A \end{pmatrix}$  是  $M_{n+1}(A)$  中的元素, 这样得到嵌入映射列

$$M_1(A) \rightarrow M_2(A) \rightarrow \cdots \rightarrow M_n(A) \rightarrow \cdots.$$

**定义 46.** 定义

$$M_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(A),$$

$$\mathrm{GL}_\infty^+(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{GL}_n^+(A),$$

$$\mathrm{U}_\infty^+(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{U}_n^+(A),$$

均按余极限理解.

对于  $M_\infty(A)$ , 其中不同大小的矩阵只需补 0 变成相同大小再进行加法和乘法运算即可, 这样  $M_\infty(A)$  就是一个  $\mathbb{C}$ -代数, 再加上自然的对合运算, 使其成为一个  $*$ -代数.

对于  $\mathrm{GL}_\infty^+(A)$  和  $\mathrm{U}_\infty^+(A)$  而言, 它们的乘法结构也类似, 再带余极限拓扑  $\varinjlim_n \mathrm{GL}_n^+(A)$  和  $\varinjlim_n \mathrm{U}_n^+(A)$ , 使其成为拓扑群.

**定义 47** (投射元). 设  $A$  是一个  $*$ -代数, 其中的幂等自伴元素称为  $A$  的投射元, 即满足  $p^2 = p = p^*$  的元素  $p \in A$ .

设  $p$  和  $q$  是  $A$  中的投射元, 若存在  $u \in A$ , 使得  $p = u^*u$ ,  $q = uu^*$ , 则称  $p$  和  $q$  是等价的, 记作  $p \sim q$ , 将  $p$  所在的等价类记为  $[p]$ .

设  $A$  还是赋范的  $*$ -代数, 若存在连续映射  $f: [0, 1] \rightarrow A$  使得  $f(0) = p$ ,  $f(1) = q$ , 且对任意  $t \in [0, 1]$ , 有  $f(t)$  都是投射元, 则称  $p$  和  $q$  是同伦的, 记作  $p \sim_h q$ .

现设  $A$  是未必含幺且未必交换的  $C^*$  代数, 定义  $V(A)$  为  $M_\infty(A)$  中所有投射元的等价类组成的集合, 在  $V(A)$  上定义加法为分块矩阵  $[p] + [q] = \left[ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right]$ , 幺元为  $[0]$ , 则  $(V(A), +)$  是一个交换幺半群.

此处有一点需要注意,  $M_\infty(A)$  中相同大小的矩阵自然可以等价, 而不同大小的矩阵也可以等价, 例如  $p$  是  $m \times m$  矩阵,  $q$  是  $n \times n$  矩阵, 不妨设  $m \geq n$ , 则可以有  $m \times n$  矩阵  $u$  使得  $p = uu^*$ ,  $q = u^*u$ , 虽然  $u$  不是方阵, 但可以补 0 使其成为  $m \times m$  分块矩阵  $(u, 0)$ , 其对合为  $\begin{pmatrix} u^* \\ 0 \end{pmatrix}$ , 计算得到  $(u, 0) \begin{pmatrix} u^* \\ 0 \end{pmatrix} = uu^* = p$ ,  $\begin{pmatrix} u^* \\ 0 \end{pmatrix} (u, 0) = \begin{pmatrix} u^*u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 恰好是  $q$  补 0 得到的  $m \times m$  矩阵, 于是  $[p] = [q]$ .

我们定义  $K_{00}(A)$  为  $V(A)$  的格罗滕迪克群  $K(V(A))$ . 假设  $f: A \rightarrow B$  是  $*$ -代数之间的同态, 则由  $f$  诱导出幺半群同态  $f_*: V(A) \rightarrow V(B)$ , 其中  $f_*([(a_{ij})_{n \times n}]) = [(f(a_{ij}))_{n \times n}]$ , 进而诱导出群同态  $f_*: K_{00}(A) \rightarrow K_{00}(B)$ .

现在来计算一下  $K_{00}(\mathbb{C})$ . 由线性代数知  $M_\infty(\mathbb{C})$  中的投射元的等价类由其秩完全分类, 两个幂等自伴矩阵等价当且仅当它们的秩相等, 因此  $V(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $K_{00}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ .

**定义 48** (解析  $K_0$  群). 设  $A$  是一个未必含幺且未必交换的  $C^*$  代数,  $\pi: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$  为标准的投影同态, 定义  $A$  的解析  $K_0$  群为

$$K_0^{an}(A) = \ker \pi_* = \ker(K_{00}(\tilde{A}) \rightarrow K_{00}(\mathbb{C})) = \ker(K_{00}(\tilde{A}) \rightarrow \mathbb{Z}),$$

无混淆时上标  $an$  可省略.

可以证明  $V$ ,  $K_{00}$  和  $K_0$  都与直和可交换,  $K_0$  是从  $C^*\text{Algebra}$  到  $\text{Ab}$  的函子.

可以证明  $K_{00}(\tilde{A}) \cong K_0(A) \oplus \mathbb{Z}$ , 若  $A$  已含幺, 可以证明

$$\begin{aligned} K_0(A) &= \ker(K_{00}(\tilde{A}) \rightarrow \mathbb{Z}) \cong \ker(K_{00}(A \oplus \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{Z}) \\ &\cong \ker(K_{00}(A) \oplus K_{00}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{Z}) \cong \ker(K_{00}(A) \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \\ &\cong K_{00}(A), \end{aligned}$$

即有  $K_0(\tilde{A}) \cong K_0(A) \oplus \mathbb{Z}$ .

设  $G$  是拓扑群, 以  $G_0$  表示其单位元所在的道路连通分支, 可以证明它是正规子群, 则存在商群  $G/G_0$  是  $G$ , 其元素为  $G$  的连通分支.

**定理 75.** 设  $A$  是一个未必含幺且未必交换的  $C^*$  代数, 则

$$\text{GL}_\infty^+(A)/\text{GL}_\infty^+(A)_0 \cong \text{U}_\infty^+(A)/\text{U}_\infty^+(A)_0.$$

**定义 49** (解析  $K_1$  群). 设  $A$  是一个未必含么且未必交换的  $C^*$  代数, 定义  $A$  的解析  $K_1$  群为

$$K_1^{an}(A) = \mathrm{GL}_\infty^+(A)/\mathrm{GL}_\infty^+(A)_0,$$

无混淆时上标  $an$  可省略.

$K_1(A)$  中的乘法显然是  $[a][b] = [ab]$ , 么元为  $[1]$ , 逆元为  $[a^{-1}]$ , 可以证明  $K_1$  也是  $C^*\mathrm{Algebra}$  到  $\mathrm{Ab}$  的函子.

类似的记  $\mathrm{GL}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^\infty \mathrm{GL}_n(A)$ ,  $\mathrm{U}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^\infty \mathrm{U}_n(A)$ , 则有

$$K_1(A) \cong \mathrm{GL}_\infty(\tilde{A})/\mathrm{GL}_\infty(\tilde{A})_0 \cong \mathrm{U}_\infty(\tilde{A})/\mathrm{U}_\infty(\tilde{A})_0,$$

当  $A$  已含么时有

$$K_1(A) \cong \mathrm{GL}_\infty(A)/\mathrm{GL}_\infty(A)_0 \cong \mathrm{U}_\infty(A)/\mathrm{U}_\infty(A)_0.$$

**定义 50** (张量积). 设  $A$  和  $B$  是两个  $C^*$  代数, 它们的代数张量积记为  $A \odot B$ , 设  $\pi_A$  和  $\pi_B$  分别是  $A$  和  $B$  在  $(H)_A$  和  $(H)_B$  上的忠实  $*$ -表示, 记  $\pi_A \odot \pi_B$  为  $A \odot B$  在  $(H)_A \otimes (H)_B$  上的忠实  $*$ -表示, 则  $A \odot B$  上的范数定义为

$$\|x\| = \|\pi_A \odot \pi_B(x)\|,$$

该范数未必是完备的, 其完备化记为  $A \otimes B$ , 称为  $A$  和  $B$  的张量积.

该定义的良好性见 [23] 附录 T.

**定义 51** (悬挂). 设  $A$  是一个未必含么且未必交换的  $C^*$  代数, 定义  $A$  的悬挂为

$$SA = C_0(\mathbb{R}) \otimes A,$$

其中  $C_0(\mathbb{R})$  表示从  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{C}$  的在无穷远处消失的连续函数空间, 我们以  $S^n A$  表示  $A$  的  $n$  次悬挂.

**定理 76** (Bott 周期律). 设  $A$  是一个未必含么且未必交换的  $C^*$  代数, 则有自然同构

$$K_1(A) \cong K_0(SA), \quad K_0(A) \cong K_1(SA).$$

我们依旧可以按  $K_n(A) = K(S^n A)$  定义高次  $K$  群, 由 Bott 周期律可知,  $K_{n+2}(A) \cong K_n(A)$  对任意  $n \geq 0$  都成立.

最后我们说明为什么解析  $K$  理论是拓扑  $K$  理论的非交换推广, 这是所谓非交换几何这一学科的基本结果.

**定理 77.** 设  $X$  是一个局部紧豪斯多夫空间, 标量域选定为复数域  $\mathbb{C}$ , 则  $C_0(X)$  的解析  $K$  群与  $X$  的拓扑  $K$  群同构, 即

$$K_n^{an}(C_0(X)) \cong K_{top}^{-n}(X)$$

对任意  $n \geq 0$  都成立.

由 Serre-Swan 定理可以得到免费赠送的  $K_0^{an}(C(X)) \cong K_{top}^0(X) \cong K_0^{alg}(C(X))$ , 其中  $X$  紧. 一般而言, 解析  $K$  理论与代数  $K$  理论除此之外基本没有什么联系.

由 Bott 周期律和盖尔方德理论可知只需证明  $n = 0$  或  $1$  和  $X$  紧的情况, 这里仅给出证明思路, 详见 [15]3.3.7.

假设  $p \in M_\infty(C(X))$  是投射元, 则一定存在某个  $n$ ,  $p \in M_n(C(X))$ , 利用  $M_n(C(X)) \cong C(X, M_n(\mathbb{C}))$ , 对任意  $x \in X$ , 将  $p(x)$  看做  $M_n(\mathbb{C})$  中的元素, 定义

$$E = \{(x, v) \in X \times \mathbb{C}^n : v \in p(x)(\mathbb{C}^n)\},$$

可以证明这是  $X$  上的一个向量丛. 反过来, 假设  $E$  是  $X$  上的向量丛, 由 Swan 定理知截面  $\Gamma(E)$  是有限生成投射  $C(X)$ -模, 总能选取向量丛  $F$  使得  $\Gamma(E) \oplus \Gamma(F) \cong C(X)^n$  且  $E \oplus F \cong X \times \mathbb{C}^n$  是正交和, 设  $p(x): \mathbb{C}^n \rightarrow E_x$  为正交投影, 将连续函数  $p: X \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  看做函数项矩阵, 有  $p \in M_n(C(X))$ , 由于  $p$  在  $P$  上是恒等映射, 则有  $p^2 = p$ , 由正交投影知  $p = p^*$ , 这样就得到了一个投射元  $p \in M_\infty(C(X))$ . 可以证明以上两种构造互逆, 且具有函子性, 于是  $K_0^{an}(C_0(X)) \cong K_{top}^0(X)$ . 由拓扑  $K^{-1}$  群的第二种定义知  $K_{top}^{-1}(X) \cong K_{top}^0(X \times R)$ , 而  $K_1^{an}(C(X)) \cong K_0^{an}(C_0(\mathbb{R}) \otimes C(X))$ , 由  $C^*$  代数理论知  $C_0(\mathbb{R}) \otimes C(X) \cong C_0(\mathbb{R} \times X)$  ([14] 定理 B.17), 于是得到  $K_1^{an}(C_0(X)) \cong K_{top}^{-1}(X)$ .

除解析  $K$  群外, 解析  $K$  理论中还有一种  $K$  理论称为解析  $K$  同调, 次数记为上标  $K_{an}^n(A)$ , 而所谓的  $KK$  理论则将解析  $K$  群和解析  $K$  同调统一起来, 其对象是  $C^*$  代数的二元组  $(A, B)$ , 有  $KK^i(A, \mathbb{C}) \cong K^i(A)$ ,  $KK^i(\mathbb{C}, B) \cong K_i(B)$ , 详见 [4, 9, 25, 27].

$K$  群还可以推广到更一般的代数如  $\mathbb{C}$ -代数和巴拿赫代数等, 参见 [4, 25].

## E.4 历史注记

1955, 塞尔定理,  $K$  理论最初的思想源泉.

1957, 格罗滕迪克定义概形的  $K_0$  群.

1960 年代, Bass 和 Milnor 等人引入环的代数  $K_0, K_1, K_2$  群.

1961, Atiyah 和 Hirzebruch 提出拓扑  $K$  理论.

1962, Swan 定理.

1970 年代, 解析  $K$  理论.

## 参考文献

- [1] Astrid an Huef, Iain Raeburn, and Dana Williams, *Functoriality of rieffel's generalised fixed-point algebras for proper actions*, 2009.
- [2] Michael Francis Atiyah, *K-theory*, W.A. Benjamin, New York, 1967, Notes by D. W. Anderson.
- [3] Guram Bezhanishvili, Patrick J. Morandi, and Bruce Olberding, *Bounded archimedean  $\ell$ -algebras and Gelfand-Neumark-Stone duality*, Theory and Applications of Categories **28** (2013), no. 16, 435–475.
- [4] Bruce Blackadar, *K-theory for operator algebras*, 2 ed., Mathematical Sciences Research Institute Publications, no. 5, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998.
- [5] Martin Brandenburg, *Non-unital gelfand duality*, Matheplanet, May 2015, <https://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/dl.php?id=1753> Accessed: 2026-06-06.
- [6] Ulrich Bunke, *Lecture course on  $C^*$ -algebras and  $C^*$ -categories*, Lecture notes, Universität Regensburg, February 2021, <https://bunke.app.uni-regensburg.de/VorlesungCastcats-1.pdf> Accessed: 2026-06-02.
- [7] Gerald B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*, 2nd ed., Textbooks in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 2016.
- [8] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [9] Nigel Higson and John Roe, *Analytic  $k$ -homology*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [10] Peter Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, 1982, MR85f:54002.
- [11] Peter D. Lax, *Functional analysis*, Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts, vol. 55, Wiley-Interscience, New York, 2002.
- [12] James R. Munkres, *Topology*, 2nd ed., Prentice Hall, 2000.
- [13] Jet Nestruev, *Smooth manifolds and observables*, Graduate Texts in Mathematics, no. 220, Springer-Verlag, New York, 2003.



- [14] Iain Raeburn and Dana P. Williams, *Morita equivalence and continuous-trace  $c^*$ -algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 60, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [15] M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen, *An introduction to  $k$ -theory for  $c^*$ -algebras*, London Mathematical Society Student Texts, no. 49, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- [16] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1976.
- [17] ———, *Functional analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1991.
- [18] Irving Ezra Segal, *Irreducible representations of operator algebras*, Bulletin of the American Mathematical Society **53** (1947), 73–88.
- [19] Jean-Pierre Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. (2) **61** (1955), 197–278.
- [20] M. H. Stone, *A general theory of spectra. I*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **26** (1940), no. 4, 280–283.
- [21] ———, *A general theory of spectra: II*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **27** **1** (1941), 83–7.
- [22] Richard G. Swan, *Vector bundles and projective modules*, Transactions of the American Mathematical Society **105** (1962), no. 2, 264–277.
- [23] N. E. Wegge-Olsen,  *$K$ -theory and  $c^*$ -algebras: A friendly approach*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [24] Charles A. Weibel, *The  $K$ -book: An introduction to algebraic  $K$ -theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 145, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
- [25] Rufus Willett and Guoliang Yu, *Higher index theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 189, Cambridge University Press, Cambridge, 2020.
- [26] 李文威, 代数学方法: 卷一, 高等教育出版社, 2019.
- [27] 黎景辉, 拓扑群引论, 科学出版社, 北京, 2001.
- [28] ———, 代数  $K$  理论, 现代数学基础丛书, 科学出版社, 北京, 2018.